А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.151.2
А46
УДК 514.01(075.8)

Александров А. Д. Основания геометрии: Учебн. пособие для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 288 с.

Содержит изложение оснований евклидовой геометрии, отправляющееся от простой, выводимой из практики системы аксиом геометрии на плоскости. За ним следуют выводы, создающие мост от аксиом к обычному изложению элементарной геометрии, включая учение о площади. Далее — аксиомы геометрии в пространстве, отвлеченное понимание аксиоматики, непротиворечивость и др., затем — сравнительное изложение разных систем аксиом, общее понятие об аксиоматическом методе, очерк развития оснований геометрии и общие выводы об отношении геометрии к действительности.

Для студентов вузов, изучающих основания геометрии. Книга будет полезна учителям средней школы.

Рецензенты:

кафедра геометрии Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина (заведующий кафедрой — профессор *Л. С. Атанасян*);
академик *С. П. Новиков*

Александр Данилович Александров

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Редакторы *А. Л. Вернер, Ю. Д. Бураго*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *А. П. Колесникова*
Корректоры *Л. И. Назарова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32428

Сдано в набор 25.02.87. Подписано к печати 25.08.87. Формат 84×108/32. Бумага офсетная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,33. Уч.-изд. л. 15,54. Тираж 24000 экз. Заказ № 699. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

А $\frac{1702040000-176}{053(02)-87}$ 53-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под «основаниями геометрии» обычно понимают систему аксиом геометрии Евклида вместе с относящимися к ней вопросами непротиворечивости, полноты и независимости аксиом — особенно аксиомы параллельных. Это составляет содержание курса оснований геометрии, читаемого в педагогических институтах и университетах. Этому же в первую очередь посвящена и данная книга. В ней я старался дать обстоятельное и доступное изложение некоторой системы аксиом вместе с последующими выводами так, чтобы они на самом деле подводили основу под обычное содержание элементарной геометрии.

Это относится прежде всего к измерению длин отрезков и площадей многоугольников. Нужно доказать существование этих величин и их численных выражений, исходя из чисто геометрических предпосылок, выраженных в аксиомах. Это, во-первых, соответствует тому, что само понятие вещественного (действительного) числа выросло из сравнения величин. Во-вторых, для понимания основ геометрии необходимо иметь достаточно точное представление о процессе измерения длин отрезков. В этой связи дополнительно введен параграф, посвященный общему понятию величины.

Отметим еще такой вопрос: что значит обычное утверждение, что стороны треугольника ограничивают треугольник как часть плоскости? Нужно определить, что значит — ограничивают, и доказать из аксиом, что стороны в самом деле ограничивают треугольник. Как раз для таких вопросов выводы из аксиом оказываются особенно кропотливым делом. Но ничего не поделаешь: если мы взялись честно основывать геометрию на аксиомах, то приходится «продираться» через эти заросли, где скрупулезно доказываются очевидные вещи. Читатель может, конечно, пропустить часть таких выводов, но хоть что-нибудь из них пройти нужно обязательно, чтобы почувствовать и понять, что — не в общих словах, а на деле — означает аксиоматическое обоснование геометрии.

Некоторая особенность изложения состоит в том, что сначала даются только аксиомы планиметрии (гл. 2) и выводы из них (гл. 3, 4); на них же обсуждаются дальше вопросы непротиворечивости, полноты и независимости аксиом (гл. 5, 6). Аксиомы пространства вводятся только потом (гл. 7). Это соответствует разделению курса геометрии, когда планиметрия предшествует стереометрии, не считая других существенных соображений.

Геометрия возникла из практики, в особенности из измерения земли в Древнем Египте. Принятые в основу нашего изложения аксиомы (не считая аксиомы непрерывности Кантора) непосредственно выражают эту «землемерную» практику. В гл. 1 они подаются как «правила» в их прямом практическом содержании и только в гл. 2 излагаются как аксиомы, хотя общее понимание аксиом, вовсе отвлеченное от какого бы то ни было наглядного содержания, обсуждается только в гл. 5.

Основными объектами аксиоматики служат точки и отрезки соответственно тому, что как в практике, так и в элементарной геометрии фигурируют именно отрезки, а не бесконечные прямые (их не было и у Евклида). Но кроме точек и отрезков в планиметрии рассматриваются такие фигуры, как, например, окружность. Однако, кажется, ни в одной из известных аксиоматик не вводится понятие фигуры так, чтобы под него подпадала хотя бы окружность. Например, в «Основаниях геометрии» Гильберта об этом нет речи. Если же согласно теоретико-множественной установке фигура определяется как множество точек, то встает вопрос об аксиоматическом определении понятия множества и мы рискуем «влезть» в связанные с ним трудности, которые как раз старался обойти Гильберт.

В качестве решения проблемы я ввожу (в гл. 2) «аксиомы фигуры», в которых выражено, что фигура есть вообще то, что называли, и все еще называют, геометрическим местом точек (выделяемых сравнительно простым правилом). Короче, в пределах, по крайней мере, элементарной геометрии фигура, геометрическое место или множество точек, как мы его здесь понимаем,— это одно и то же. Эта точка зрения явно проводится в определениях ряда фигур элементарной геометрии, как окружность, прямая, треугольник и т. д.

Для того чтобы расширить взгляд читателя на основания геометрии, в гл. 6 специально излагаются разные системы аксиом планиметрии. Далее в гл. 7 появляются аксиомы стереометрии, причем в таком виде, что они тут же без всякого труда обобщаются до аксиом n-мерного евклидова пространства.

За этим следует доказательство их непротиворечивости и построение на их основе начал n-мерной геометрии. Это представляется полезным в ряде отношений. Во-первых, вопрос о непротиворечивости здесь имеет совсем иной характер, чем в планиметрии. Ведь заранее неясно, не потому ли наше пространство трехмерно, что многомерного пространства не может быть уже по логическим причинам. Во-вторых, доказывая теоремы в n-мерном пространстве, мы неизбежно должны опираться на аксиомы, поскольку наглядные представления там делаются трудными и сомнительными (хотя при известной аккуратности и привычке они как «квазинаглядные» вполне возможны). Весь этот материал может рассматриваться как дополнительный.

Дополнением служит также параграф об аксиоматическом методе, где излагаются аксиомы группы, метрического и топологического пространства — как примеры аксиоматики за пределами элементарной геометрии, к тому же играющие в основаниях этой геометрии существеннейшую роль. В конце главы о евклидовом пространстве введен также параграф, где кратко говорится о других «геометриях».

Последняя глава посвящена очерку развития оснований геометрии. Обсуждается не только история аксиоматики «от Евклида до Гильберта», но также развитие взгляда на предмет геометрии от раннегреческих до теоретико-множественных воззрений. Полезно понимать, что фигура в теоретико-множественном смысле — не то, как она представлялась греками. Точно так же и понимание строгости доказательств подверглось изменению. Наконец, изменилось и отношение геометрии к действительности.

Геометрия, действительные основы которой лежали в практике, в соответствии с чем ее аксиомы мы явно вывели из практики (в первой главе), отделилась от нее; произошло разделение единой геометрии на геометрию как часть математики и как часть физики. Кратким обсуждением этой «диалектики геометрии» в ее отношении к действительности, а также в ее логических выводах мы и заканчиваем наше изложение, как бы возвращаясь к началу его,— когда мы выводили аксиомы из практики, из фактов реальной действительности.

Основания геометрии — это предмет не только математический, но и гносеологический. И серьезное его понимание в отрыве от этого его второго аспекта невозможно.

Книга по замыслу обращена не только вообще к тем, кто интересуется основаниями геометрии, но специально к тем, кто профессионально заинтересован в их понимании — к настоящим и будущим учителям, студентам университетов и педагогических институтов. Думается, что им необходим достаточно широкий взгляд на основания геометрии, а не только рассмотрение одной какой-нибудь системы ее аксиом.

В основных разделах книги я старался сделать изложение обстоятельным и возможно более простым; вначале, в гл. 1 оно носит, можно сказать, совсем популярный характер, только постепенно восходя к большим трудностям отвлеченного введения аксиом в гл. 2. В дополнительных параграфах изложение может быть более кратким, иногда носящим характер обзора или только указания, с целью дать некоторое представление о предмете, о котором идет речь. В задачах я позволил себе употреблять термины, не определявшиеся в основном тексте, но, конечно, хорошо известные читателю (например: высота, медиана и т. п.).

Надеюсь, что книга отвечает потребности в развернутом пособии по основаниям геометрии, и был бы благодарен за указание недочетов и, особенно, допущенных ошибок: выводы из аксиом — дело тонкое.

Я считаю своим приятным долгом поблагодарить Ю. Ф. Борисова и особенно Л. С. Атанасяна, прочитавших всю рукопись и сделавших ряд существенных замечаний, Б. А. Розенфельда за замечания к историческому очерку и Т. Н. Рожковскую за неоценимую помощь при первоначальном редактировании рукописи,

ГЛАВА 1
ПРАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Введение

Известно, что геометрия возникла из практики, в частности из измерения земли; само слово «геометрия» и означает «землемерие». Поэтому фактически основания геометрии, по крайней мере геометрии на плоскости — планиметрии, лежат в этой практике. Соответственно, наиболее естественные логические основания геометрии, содержащиеся в ее аксиомах, должны возможно ближе выражать ту же практику, лишь представляя ее в идеализированном виде. Так мы и подойдем к аксиомам планиметрии: мы выведем их из практики.

Основания геометрии в пространстве — стереометрии более сложны, хотя все же главное в ней — это геометрия на плоскости, которую стереометрия, естественно, включает (чтобы получить аксиомы стереометрии, достаточно прибавить к аксиомам планиметрии только несколько простых аксиом). Поэтому мы ограничимся сначала основаниями планиметрии и только потом перейдем к геометрии в пространстве. Кстати, это позволит выяснить существенные вопросы оснований геометрии на более простом материале.

Слово «аксиома» происходит, как известно, от греческого и означает в переводе — «достойное признания»; прежде и понимали «аксиому» как положение, достойное признания ввиду его очевидности, не требующее доказательства, безусловное. Аксиомы геометрии тоже толковали как не требующие доказательства по очевидности[1]). Но понимание это изменилось и понятию «аксиома» дают другое определение; воспроизведем его из «Словаря русского языка».

[1]) В известном учебнике геометрии А. П. Киселева так и было написано: «Аксиомы. Так называют истины, которые вследствие своей очевидности принимаются без доказательства» (Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М., 1914, с. 1).

«Аксиома — положение, принимаемое без доказательства в качестве исходного, отправного для данной теории. Неоспоримая истина, совершенно очевидное утверждение». «Аксиоматика — совокупность аксиом, лежащих в основе той или иной теории». Говорят так же: «система аксиом».

Таким образом, прежнее значение слова «аксиома» толкуется теперь как вторичное. В науке же слово аксиома понимается всегда в смысле первого из данных в «Словаре» определений. При этом аксиомы совершенно условны, лишь бы из них выводилась соответствующая теория.

Однако в элементарной геометрии, поскольку она неразрывно связана с наглядным содержанием, не следует пренебрегать очевидностью аксиом: хорошо, чтобы они были возможно более наглядны, естественны. Это и достигается связью с практикой. (Изложение геометрии в школе тоже должно начинаться с практики, с наглядных представлений, с геометрических построений, восходя отсюда к логическому развитию геометрии[1]).)

Греческий ученый Евдем Родосский (IV в. до н. э.) писал: «Геометрия была открыта египтянами и возникла из измерения земли. Это измерение было им необходимо вследствие разливов Нила, постоянно смывавших границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом нашего рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

§ 1. Отрезки

Измерением земли и восстановлением границ земельных участков занимались в Древнем Египте специальные землемеры, которые и были, по-видимому, первыми геометрами. Они пользовались при этом веревками, отчего греки называли их герпедонаптами — веревковязателями.

[1]) Заметим, что термином «геометрия» теперь обозначают многие теории, порой довольно далекие от первоначальной элементарной геометрии. Но мы, говоря о геометрии, будем иметь в виду евклидову планиметрию и стереометрию, пока не перейдем, указав на это явно, к другим геометрическим теориям.

Мы можем вообразить как два землемера втыкают в землю колышки и протягивают между ними веревку (рис. 1). Места, куда воткнуты колышки, представляют точки. Размеры их практически не играют роли; однако чем тоньше колышки — тем точнее. Натянутая веревка представляет прямолинейный отрезок. Толщина ее практически не играет роли — важна только длина. Так приходим к понятиям точки без всяких размеров и отрезка

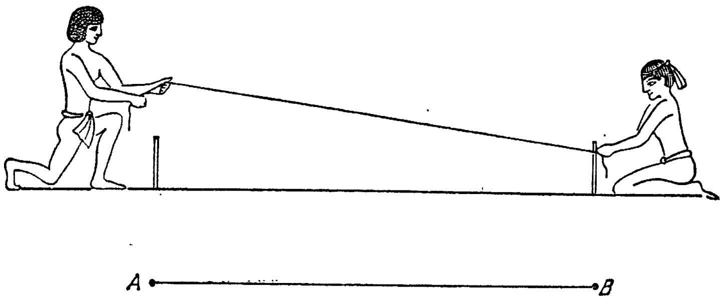

Рис. 1

без толщины и ширины. А протягивание веревки между двумя колышками дает нам при обобщении, как установленный на опыте закон реальной геометрии, следующее общее утверждение о возможности проведения отрезка.

Любые две точки можно соединить отрезком и притом единственным[1].

Но землемеры должны еще сравнивать размеры участков — сравнивать их стороны. Натянув веревку вдоль стороны одного участка, получают отрезок веревки, равный этой стороне, т. е. равный данному отрезку AB. Переносят веревку и вытягивают отмеренный ею отрезок вдоль стороны другого участка (рис. 2), т. е. откладывают вдоль этой стороны отрезок веревки, равный данному AB, и получают отрезок A_1B_1, равный AB. Обоб-

[1]) Едва ли египтяне высказывали явно такое утверждение; оно, надо думать, просто подразумевалось как очевидное. Но у Евклида первый постулат утверждает: «что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую», так что под «прямой» понимается не бесконечная, а «конечная прямая», т. е. отрезок. Мы вовсе не претендуем на то, чтобы в какой-либо мере восстанавливать выводы самих египтян или греков. Наша задача состоит только в том, чтобы показать исходное практическое содержание того, что мы примем в качестве аксиом планиметрии.

щая это построение, получаем общее утверждение о возможности откладывания отрезка.

От конца данного отрезка можно отложить вдоль него отрезок, равный наперед заданному, и притом единственный.

Кроме того, в описанном построении заключается еще один вывод. Отрезок A_1B_1, равный AB, сравнивается

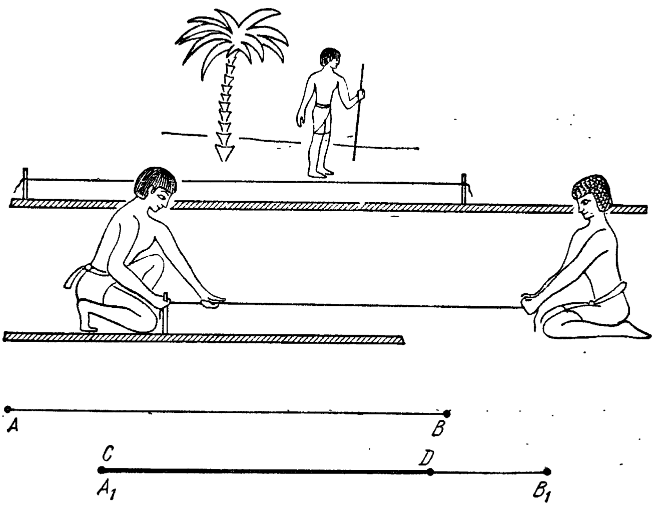

Рис. 2

с ним не прямо, а через отрезок веревки (веревку можно переносить, а стороны участков, конечно, нельзя). Обобщая, получаем утверждение о сравнении отрезков.

Отрезки, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.

Наконец, может обнаружиться, что наличной веревки не хватает для сравнения с ее помощью отрезка A_1B_1 с данным AB. Тогда это делают по частям. Натянув веревку от точки A до какой-то точки C на отрезке AB, переносят веревку на отрезок A_1B_1 и отмечают на нем отрезок A_1C_1, равный AC. Потом натягивают веревку уже от точки C... (рис. 3). Так сравнивают отрезки по частям. Обобщая, получаем, можно сказать, закон сложения отрезков.

Отрезки, слагающиеся из соответственно равных отрезков, равны.

Если точки C, C_1 лежат на отрезках AB и A_1B_1 и при этом $A_1C_1 = AC$, $C_1B_1 = CB$, то также $A_1B_1 = AB$ (рис. 3). Тут отрезки AB, A_1B_1 слагаются из двух каждый, но могут слагаться и из большего числа. Натягивая более длинную веревку вдоль отрезка AB, а потом вдоль A_1B_1, можно сравнить их прямо — без промежуточных точек C, C_1 — и убедиться, что они равны.

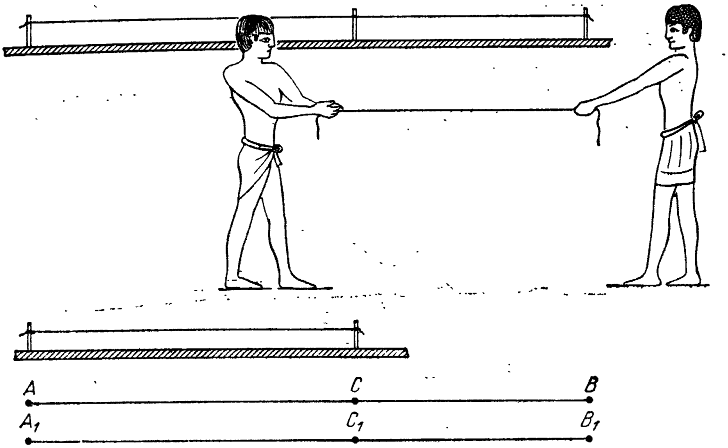

Рис. 3

Но если нет такой длинной веревки или линейки, по которой можно провести суммарный отрезок, то как тогда обеспечить, чтобы два отрезка, примыкающие один к другому, составляли один отрезок? Есть простой способ.

Пусть нужно продолжить отрезок AB на отрезок, равный данному c. Берем отрезок несколько длиннее c и добавок натягиваем (а линейкой откладываем) вдоль отрезка AB от точки B до D (рис. 4). Так получается отрезок DC, перекрывающийся с AB, на участке DB. Отрезки AB и DC образуют вместе один отрезок AC. Обобщая, можно это выразить в виде правила соединения отрезков.

Если точка D лежит на отрезке AB, и отрезок DC проходит через точку B, то отрезки AB и DC образуют один отрезок (рис. 4).

Можно заметить, что вообще, если у двух отрезков есть две общие точки, то они образуют один отрезок.

Все построения, о которых шла речь, проводятся на «плоскости» — на земле, на бумаге, на доске. Но их можно проделывать и в пространстве, протягивая, скажем, веревку из окна на улицу. Отличие в том, что можно ограничить часть плоскости отрезками как забором, и можно различать, что лежит с одной стороны от отрезка, а что — с другой; в пространстве же это невозможно. Конечно, отрезок на плоскости можно обойти, но продолжая отрезок, можно перекрыть обход (рис. 5). Это дает нам закон разделения плоскости.

На плоскости по отношению к каждому данному отрезку различают две стороны: любые две точки на одной

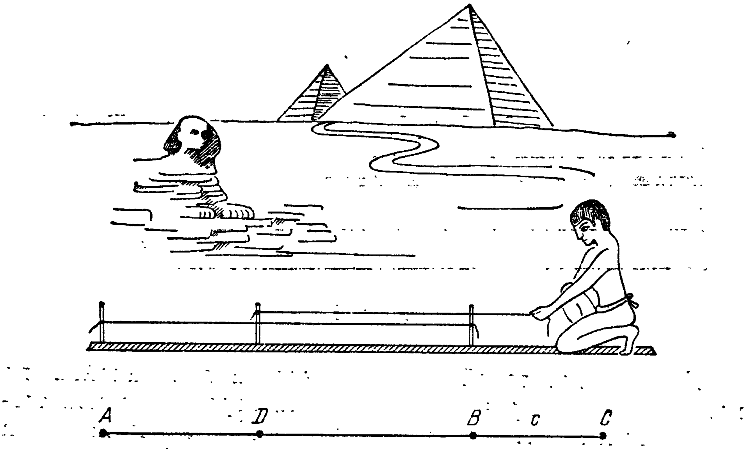

Рис. 4

стороне можно соединить, не пересекая ни сам отрезок, ни его продолжения, но для точек, лежащих с разных сторон, это невозможно (рис. 5).

Замечание 1. Веревка представляет собой довольно грубое средство: достигаемая с нею точность не велика, хотя вполне годится для разметки участков земли. Тонкая веревка годится для построений и сравнения длин на классной доске, а нитка — для того же в тетради. Когда нужна большая точность или когда имеют дело с большими расстояниями, пользуются другими средствами. Прямолинейность можно определять по лучу света. При всем этом обобщения фактов, выраженные в сформулированных правилах, остаются те же. Они подтверждаются с громадной точностью не только непосредственно, но и через проверку вытекающих из соответствующих им аксиом выводов геометрии[1]).

Замечание 2. В просторечии слово «отрезок» почти не употребляется — говорят: «прямая», «проведем прямую», «иди по прямой» и т. п. Но при этом никто не имеет в виду бесконечную прямую во всей ее бесконечности, как принято теперь в геометрии. У греков,

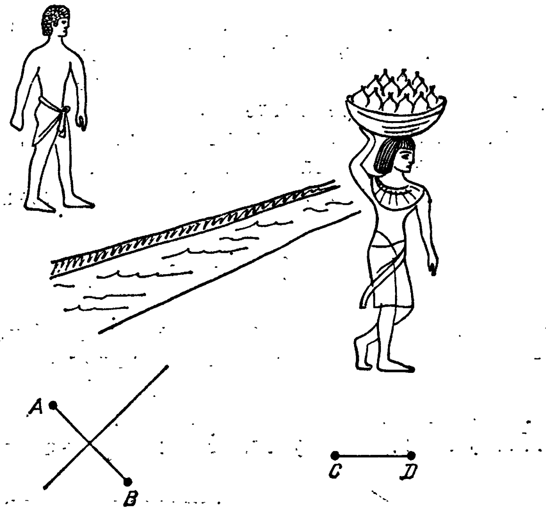

Рис. 5

в частности в «Началах» Евклида, прямая понималась как конечная; представление о бесконечной прямой им было чуждо[2]). Понятие конечной прямой — отрезка — первично и берется из практики, а понятие бесконечной прямой возникает из возможности продолжения отрезка

---

[1]) Отклонения, вытекающие из теории относительности, мы обсудим потом.

[2]) Заметим еще, что, например, Н. И. Лобачевский имел в виду конечную прямую, когда писал: «Величина прямой линии определяется сравнением ее с другой» (см.: Об основаниях геометрии.— М., 1956, с. 32). В учебнике А. П. Киселева различаются «конечная» и «бесконечная прямая» (см.: Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1980, с. 4). «Бесконечная прямая» понимается как неограниченно продолжаемая; параллельные прямые определялись как такие, которые не пересекаются, «как их ни продолжать».

за оба конца. Но теперь в изложении начал геометрии все переворачивается: бесконечная прямая понимается как нечто первичное, а отрезок определяют как часть прямой. На самом же деле в геометрии прямые в их полной бесконечности почти не встречаются, а всюду фигурируют отрезки. Даже параллельные прямые, появляясь в их определении и в аксиоме параллельности, дальше не играют роли: всегда имеют дело с параллельными отрезками. К тому же отрезок представляется, например, чертой на бумаге, но подобное изображение (модель) бесконечной прямой невозможно: бесконечная — значит, уходящая за всякие пределы Вселенной. В учебниках и в преподавании геометрии говорят о прямой, проведенной на чертеже, но на нем изображается конечная прямая. Словом, основным объектом геометрии фактически является отрезок, а не бесконечная прямая.

§ 2. Угол

Угол образуется двумя отрезками с общим концом; они — стороны угла, их общий конец — его *вершина* (рис. 6). При этом понимают, что любые отрезки с тем же общим концом, налегающие на стороны данного угла, образуют тот же угол. Если отрезки служат один

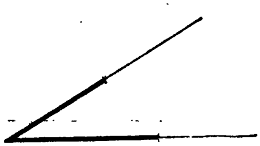

Рис. 6

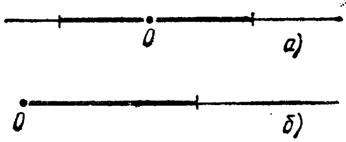

Рис. 7

продолжением другого, то угол *развернутый*; если они налегают друг на друга, то угол *нулевой* (рис. 7, *а*, *б*). Эти два особых случая мы сейчас исключаем из рассмотрения. В геометрии угол часто определяют как фигуру, состоящую из двух бесконечных полупрямых с общим началом, или как часть плоскости, ограниченную такими полупрямыми. Но такие углы не только не появляются на практике, но и в геометрии по большей части имеют в виду углы, образуемые отрезками, как, скажем, углы треугольника и т. п. У Евклида угол определяется как наклон одной линии по отношению к другой.

Представим себе, что нужно отложить от данного отрезка угол, равный данному. Скажем, землемер должен провести третью сторону участка под тем же углом к данной линии, под каким уже проведена другая сторона. Можно наложить на стороны данного угла две палочки, скрепив их у вершины, и перенести в нужное место. Но скрепление непрочно, и угол может измениться. Чтобы этого не случилось, скрепляем стороны — палочки — поперечиной, как на рис. 8. Получается жесткая конструкция, которую можно переносить и с ее помощью откладывать угол, равный данному. Этот практический прием приводит нас к определению равенства углов.

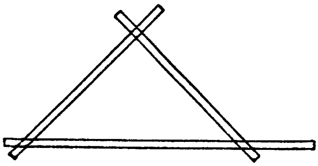

Рис. 8

Назовем *поперечиной угла* отрезок, соединяющий точки на разных его сторонах или на их продолжениях. Для двух углов с вершинами O, O_1 назовем поперечины AB и A_1B_1 *соответственными*, если $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$. Два угла, по определению, равны, если у них есть равные соответственные поперечины (т. е. при $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$ также $AB = A_1B_1$; рис. 9).

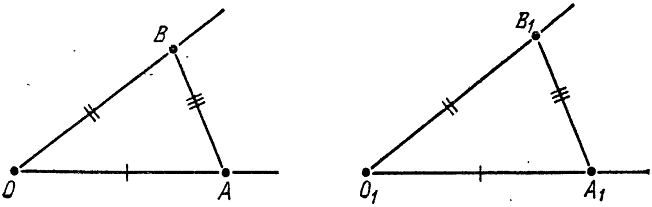

Рис. 9

Перенося конструкцию с поперечиной, можно в любом месте отложить угол, равный данному. Это мы можем принять как общее утверждение о возможности откладывания угла.

От каждого отрезка по любую сторону от него от данного его конца можно отложить угол, равный данному. При этом можно пользоваться любой поперечиной, и угол будет получаться всегда один и тот же.

Заметим, что это правило выражает в общем виде тот известный способ, каким строят угол, равный данному, с помощью циркуля и линейки (рис. 10). Пусть даны угол POQ и отрезок O_1P_1. Отметив на OP и OQ точки A, B, фиксируем на O_1P_1 точку A_1 так, чтобы $O_1A_1 = OA$. Затем циркулем строим дугу окружности с центром O_1 и радиусом OB и дугу окружности с центром A_1 и радиусом AB. В пересечении этих дуг получаем точку B_1. Через нее и проходит вторая сторона

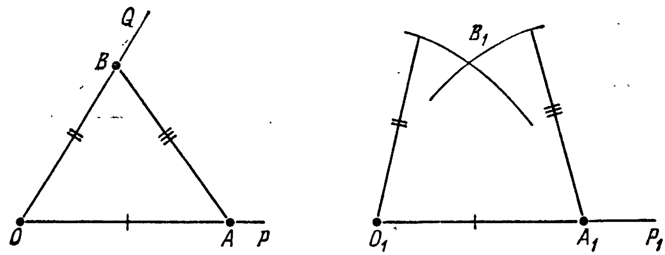

Рис. 10

угла, равного данному. По построению здесь $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$ и $A_1B_1 = AB$, т. е. поперечины тоже равны. (Сформулированное правило как раз и выражает, что построение заведомо получится: дуги пересекутся, и угол будет получаться один и тот же, какие бы точки A, B на сторонах данного угла ни брать.)

Замечание. В этой главе мы рассматриваем *практические* основания геометрии. Поэтому изложенное построение, как и все, о которых идет здесь речь, понимается в буквальном смысле: с помощью реального циркуля и реальной линейки, так что «дуга окружности» — это линия, зачерчиваемая циркулем — например, след карандаша. Отрезок, окружность, как дальше перпендикуляр, понимаются в том наглядном практическом смысле, как они известны, скажем, из пропедевтического курса геометрии, но никак не в смысле абстрактной аксиоматизированной геометрии.

§ 3. Прямоугольник

Прямоугольники — это (если не считать отрезков и углов) наиболее часто встречающиеся в практике фигуры: дверные проемы, оконные стекла, верхние доски столов, стены и потолки комнат, листы бумаги; на земле — поверхности грядок, и т. д. и т. п.— все они по большей части имеют прямоугольную форму. Так и в Египте люди очерчивали прямоугольные участки земли, прямоугольные основания домов и храмов и др.

Прямоугольник можно построить так. Из концов данного отрезка AB проводят в одну сторону равные перпендикулярные ему отрезки AC, BD (рис. 11). (Уже египетские землемеры умели восстанавливать перпендикуляры.) Затем соединяют концы C, D этих отрезков и получают прямоугольник. В частности, будет $CD = AB$. Это и можно принять как «правило прямоугольника» — утверждение о возможности строить прямоугольники.

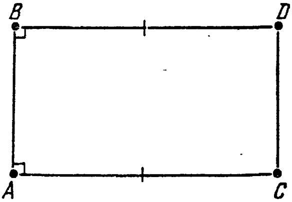

Рис. 11

Если из концов отрезка AB проведены в одну сторону равные перпендикулярные ему отрезки AC, BD, то $CD = AB$.

Это правило можно назвать также *правилом параллельных отрезков*. Действительно, продолжая отрезки AC, BD, будем получать сколь угодно длинные отрезки, находящиеся на постоянном расстоянии друг от друга, т. е. параллельные друг другу, как, например, рельсы прямого железнодорожного пути.

Замечание. Почти во всех изложениях оснований геометрии вместе с основным понятием прямой фигурирует аксиома параллельных. В ней речь идет о двух непересекающихся бесконечных прямых, и потому ее реальный практический смысл довольно трудно разъяснить; ее часто высказывают без всяких пояснений. У Евклида равносильная аксиома — пятый постулат — выражался существенно иначе (мы формулируем ее потом при изложении «Начал» Евклида) (гл. 9).

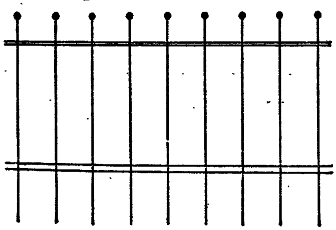
Рис. 12

Мы заменяем аксиому параллельных «аксиомой прямоугольника», повторяющей только что сформулированное «правило прямоугольника». Она имеет совершенно ясное, непосредственно практическое содержание. Ее, как отмечено, можно назвать также аксиомой параллельных отрезков. Главное свойство параллельных прямых состоит именно в равенстве расстояний точек одной прямой до другой (рис. 12). Греческое слово «параллельная» означает «идущая рядом» и тем самым выражает именно это основное свойство параллельных линий.

§ 4. Измерение

Вернемся к сравнению отрезков. В простейшем случае, сравнивая один реальный отрезок AB с другим CD, растягивают веревку вдоль AB, затем переносят на CD и так выясняют какой из отрезков больше, или они равны. Если веревка, укладывающаяся на отрезке AB, не умещается на CD, то отрезок AB больше (рис. 13); если же веревка не дотягивает от C до D, то CD больше. Так в простейшем случае (веревкой или чем-нибудь другим) сравнивают отрезки по их величине — по длине. Более точное сравнение и в том случае, когда нет веревки, которая растягивалась бы по одному из отрезков, получается путем измерения.

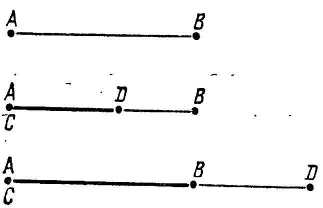

Рис. 13

Измерение длины отрезка или, короче говоря, измерение отрезка состоит в сравнении его с каким-либо фиксированным отрезком, принятым за единицу измерения[1]). Оно основано на тех же правилах или законах откладывания, сравнения и сложения отрезков. В простейших практических случаях измеряют тем, что есть в наличности; сторону земельного участка — шагами, доску — «четвертями», растянутыми пальцами и т. п.

В общем виде измерение происходит так. Откладываем вдоль данного отрезка AB отрезок AA_1, равный «единице» e. Допустим, точка A_1 оказалась на отрезке AB так, что остался отрезок A_1B. Вдоль A_1B отклады-

[1]) Точнее, единицу измерения представляет не один данный отрезок, а его длина или, можно сказать, любой равный ему отрезок. Так мы говорим «один метр», имея в виду не эталон, не отрезок между чертами, нанесенными на стержне, хранящемся в Институте метрологии, а длину в один метр. См. дальше гл. 5, § 31 о величинах.

ваем отрезок A_1A_2, равный e, и так продолжаем, пока от конца A_n n-го отрезка уже нельзя дальше отложить отрезок, равный e, укладывающийся в отрезке AB (рис. 14). При этом либо точка A_n совпадает с B, либо остается «остаток» — отрезок A_nB, который короче, чем e. В первом случае говорим, что длина отрезка AB равна n («единиц» e), во втором — больше n, но меньше $n+1$. Во втором случае, когда отрезок AB не измеряется точно в целых «единицах», отрезок AB слагается из отрезка AA_n, равного ne, и остатка A_nB. Для измерения

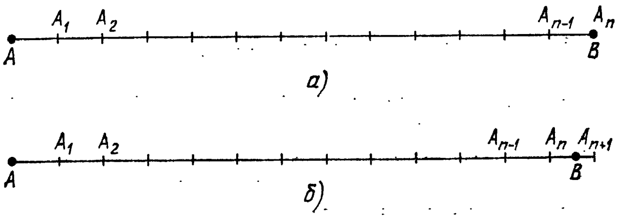

Рис. 14

остатка берут более мелкую «единицу» e_1 (как правило, какую-либо долю «единицы» e). Если опять останется остаток, то его измеряют еще более мелкой «единицей» и т. д.

Практически этот процесс все более точного измерения очень быстро кончается — просто потому, что никакой реальный отрезок — будь то линия, ограничивающая земельный участок, стальной стержень, ребро доски стола и т. п.— не имеет абсолютно точных размеров. Однако теоретически в геометрии считается, что процесс измерения можно продолжать неограниченно.

Оставив пока в стороне эту абстрактную возможность, посмотрим, что предполагается в процессе измерения и что оно дает. Откладывая на данном отрезке AB отрезки, равные «единице» e, мы рано или поздно приходим к тому, что дальше откладывать «единицу» невозможно: доходим до того, что n отрезков e покрывают AB или отсекают от него отрезок, меньший e, так что $(n+1)$-й отрезок e перекроет AB. Это выражают в виде правила, которое принято называть аксиомой Архимеда[1]).

[1]) Однако ее впервые высказал не Архимед, а его предшественник Евдокс (если не кто-нибудь еще раньше). Архимед сам на него ссылался.

Какие два отрезка ни взять, равными любому из них можно перекрыть другой.

Иначе говоря, для отрезков a, e существует такое целое число m, что $a < me$. Понятно, что только возможность такого сравнения отрезков позволяет выразить или оценить длину одного отрезка через длину другого.

Используемую при уточнении измерения возможность делить данный отрезок на меньшие равные доли не нужно формулировать особо, так как это в геометрии выводится из других аксиом.

§ 5. Свойства численного выражения длины

Значение измерения и численного выражения длины состоит в том, что геометрическим соотношениям отрезков соответствуют аналогичные соотношения численных значений длин. Благодаря этому вместо построений можно пользоваться записями и вычислениями на бумаге, начиная с того, что длину отрезка можно задавать не образцом, имеющим такую-то длину, а числом. Рядом с фигурой землемера появляется фигура писца (рис. 15).

Рис. 15. Египетская статуя

Абсолютно точные выражения и задания длин *реальных* отрезков невозможны. Но практически всегда можно выбрать настолько малую «единицу», что рассматриваемые длины будут выражаться в целых числах с достаточной точностью. Так, скажем, для отрезков на чертежах можно взять за такую «единицу» микрон, и отличается ли один отрезок от другого на несколько микронов, не будет иметь никакого практического значения. К тому же можно заметить, что числа фактически выражаются десятичными дробями — в целых числах некоторых десятичных долей. Таким образом, длины практически выражают целыми числами с достаточной точностью. Тогда соответствие геометрических соотношений отрезков и численных длин устанавливается совершенно элементарно.

Итак, мы рассматриваем отрезки, составленные из отрезков, равных некоторой «единице» e, и выражаем их длины в этой «единице». Легко доказывается следующее.

1. *Если длины равны, то отрезки равны.* В самом деле, пусть два отрезка a, b имеют равные длины, т. е. составляются одним и тем же числом отрезков, равных e. По правилу сравнения отрезки, равные одному и тому же e, равны друг другу. Поэтому отрезки a, b составляются из равных отрезков. А по закону сложения отрезки, составленные из соответственно равных отрезков, равны. Стало быть, отрезки a и b равны, что и требовалось доказать.

2. Обратно: *у равных отрезков длины равны.* Действительно, пусть отрезки a и b равны. Допустим, однако, что a состоит из m отрезков, равных e, а b — из другого числа, скажем, $n > m$. Тогда на b откладываются m отрезков e, что дает отрезок $c = me$, равный a по доказанному. Но так как $b = a$, то получается, что вдоль b отложено два разных отрезка, равных одному и тому же a. Это противоречит закону откладывания отрезка.

Очевидным образом доказываются следующие утверждения.

3. *Длина суммы отрезков равна сумме их длин*; обратно: *сумма длин двух или нескольких отрезков равна их сумме.*

4. Аналогичное верно *для разностей отрезков и длин.*

5. *У большего отрезка длина больше*; обратно: *если длина больше, то отрезок больше.*

Однако в геометрии мыслится бесконечно точное измерение и, соответственно, выражение длин иррациональными числами, когда длина данного отрезка не соизмерима с единицей. Это уже выходит за пределы реальности, так что здесь практические основания геометрии кончаются, и мы должны перейти к чисто теоретическим ее основаниям.

§ 6. Фигуры

Геометрию определяют как науку о пространственных формах и отношениях, взятых в их «чистом» виде — в отвлечении от материального содержания. Когда реальные тела, участки земли, какие-либо фигуры, начерченные на бумаге и пр. рассматриваются в таком отвлечении, принимаются во внимание только их форма и размеры, а все остальные свойства оставляются в стороне без внимания. В таком виде они становятся «геометрическими фигурами», при этом формы и размеры фигур считаются идеально точно определенными, не так как у реальных тел. Кроме того, в представлении о геометрических фигурах отвлекаются нередко и от некоторых размеров; так мыслятся поверхности без всякой толщины, линии без ширины и толщины, точки без всяких размеров.

Коротко можно сказать, что геометрия — это наука о фигурах, а фигура — это мысленный образ предмета, в котором сохраняются только формы и размеры — те, которые принимаются во внимание. Так, отрезок — это мысленный образ натянутой нити, лишенной всякой толщины. Отрезки, как и точки,— это только простейшие фигуры, дальше рассматриваются углы, треугольники, многоугольники, окружности... и фигура писца — тоже геометрическая фигура (см. рис. 15).

Поскольку у фигуры приняты во внимание только формы и размеры, то фигуры считаются одинаковыми (равными или конгруэнтными), если у них одинаковые формы и соответствующие размеры. Это взятое из практики понятие равенства в геометрии уточняется, поскольку еще надо уточнить, что понимается под формой и о каких размерах идет речь.

О форме и размерах в геометрии не говорят: фигуры сравнивают по расстояниям между их соответствующими точками. Например, треугольники равны, если равны их стороны, четырехугольники равны, если равны их стороны и диагонали. Для общих фигур сравнивают расстояния между любыми точками, поскольку заранее не указано, какие расстояния являются определяющими. (Это приводит к определению: две фигуры равны, если существует такое соответствие между их точками, что расстояния между соответственными точками равны, т. е. если точкам A, B соответствуют точки A', B', то отрезки AB и $A'B'$ равны.) Говорят порой, что равны те фигуры, которые можно наложить одна на другую. Но не только нельзя реально наложить, скажем, один участок земли на другой, но и представить это затруднительно. Практически, сравнивая предметы как фигуры, их обмеряют и сравнивают полученные результаты, т. е. действуют, как и говорит определение: сравнивают расстояния между соответствующими точками.

Так общее понятие равенства фигур приводится к понятию о равенстве отрезков. Вообще, геометрия в ее общем учении о любых фигурах, по крайней мере на плоскости, исходит из тех аксиом, какие говорят о точках и отрезках. Но тогда к этому нужно присоединить аксиомы, говорящие о фигурах и дающие их отвлеченное, согласно духу аксиом, определение, уже никак не опирающееся на наглядные представления.

Но еще раньше, допустив неограниченно точное измерение идеальных отрезков, мы покинули почву практики и перешли в область чистого мышления, рассуждая о том, чего, насколько можно судить, нет в действительности. В действительности нет, конечно, и идеальных отрезков, как нет и идеальных точек; однако в начальных выводах геометрии их можно представить себе более наглядно и практически, но дальше это делается невозможным — геометрия из практической превращается в часть «чистой математики», с ее идеальным, «умопостигаемым», как говорили греки, предметом — идеальными геометрическими фигурами. Как далеко могут заходить абстракции аксиоматического построения геометрии, мы потом увидим.

ГЛАВА 2

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 7. Основные понятия

При теоретическом изложении геометрии, как и всякой теории, некоторые понятия должны быть приняты за исходные, которые не определяются в самой теории, но служат для определения остальных ее понятий.

Обычно определение состоит в том, что одно понятие разъясняется через другие — так сказать, на них сводится. Но сводить одни понятия на другие без конца невозможно, поэтому неизбежно должны быть понятия, которые принимаются без таких обычных определений и если разъясняются, то из соображений, лежащих вне данной теории. В геометрии эти понятия заимствуются из практики, из основанных на ней идеализированных наглядных представлений. Одни из этих понятий означают основные объекты, с которыми имеет дело геометрия, другие — отношения между этими объектами. Мы принимаем

Основные объекты: 1) *точки*; 2) *отрезки.*

Основные отношения: 1) точка *служит концом* отрезка; 2) точка *лежит на* отрезке (или, как еще говорят, *лежит внутри* отрезка); 3) два отрезка *равны*

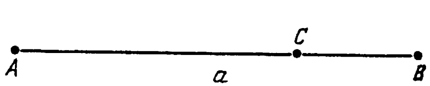

Рис. 16

друг другу (или, что равносильно, один отрезок равен другому).

Точки обозначаются, как обычно: A, B и т. п.; отрезки: a, b и т. п. Если точка C лежит на отрезке a, то кратко пишем: C на a (рис. 16).

Точки, лежащие на отрезке, а также его концы считаются точками этого отрезка, т. е. точка C *принадлежит* отрезку a (или *является точкой отрезка* a), если она либо лежит на нем, либо служит его концом (это записывается так: $C \in a$).

Теперь, пользуясь основными понятиями, определим некоторые другие начальные понятия геометрии (не обязательно придерживаясь принятой в школе формы определения со словом «называется»).

1. Отрезок a *содержится в отрезке* b (в записи: $a \subset b$), если все его точки являются также точками отрезка b.

2. Отрезки a, b *образуют отрезок* c (в записи: $a \cup b = c$), если они содержатся в c и у c нет точек, не принадлежащих им.

3. Отрезок a *отложен вдоль отрезка* b *от его конца* A, если у этих отрезков есть общий конец A и один

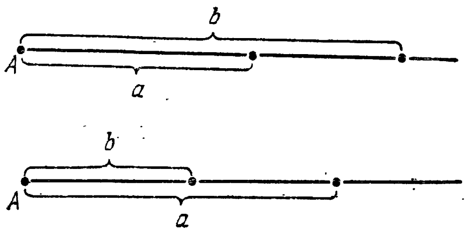

Рис. 17

содержится в другом: или $a \subset b$, или $b \subset a$ (рис. 17). Говорим также, что такие отрезки *налегают* один на другой.

4. Два отрезка *пересекаются*, если на них есть единственная общая точка.

Мы излагаем основания планиметрии — геометрии на плоскости. Само понятие плоскости в них не упоминается; в них плоскость — это, так сказать, то пространство, та среда, где выполняются высказываемые далее аксиомы и соответственно «разыгрывается» основанная на них геометрия.

Подчеркнем еще раз, что при аксиоматическом изложении геометрии основные понятия заранее не определяются; все, что от них требуется, должно быть высказано в аксиомах. Но смысл основных понятий и содержание аксиом отражает то, откуда возникли эти понятия. Наши основные объекты можно определить из их исходного наглядного смысла.

Точка — это мысленный образ предельно точно определенного места, так что в нем уже не различаются разные места. По Евклиду «точка — это то, что не имеет частей».

Отрезок — это мысленный образ туго натянутой нити, лишенной всякой толщины.

Но такие определения носят «предматематический» характер, и их не следует путать с математическими определениями.

§ 8. Аксиомы планиметрии

Теперь мы сформулируем наши аксиомы планиметрии. Среди них читатель узнает утверждения, которые в предыдущей главе были выведены из обобщения практического опыта. К ним мы присоединяем две аксиомы, выражающие такие свойства отрезков, как то, что у каждого отрезка два конца, и что всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка. Понятно, что в наглядном представлении и в практике эти свойства подразумеваются сами собой. Но теперь мы должны их явно выразить.

Дело в том, что понятие отрезка у нас основное, так что мы не формулируем в геометрии его определение. Но для того, чтобы исходя из этого понятия делать выводы, нужно явно указать все те свойства отрезков, которыми мы будем пользоваться.

Кроме того, мы сформулируем еще одну аксиому — «аксиому непрерывности», не выводимую непосредственно из практики, однако без нее полное построение планиметрии невозможно.

Все аксиомы мы делим на две группы: 1) линейные и 2) плоскостные. К первым относятся те аксиомы, в которых не присутствует представление о плоскости, так что они могли бы относиться к точкам и отрезкам, лежащим на одной прямой. Поэтому мы их называем линейными. Плоскостные аксиомы касаются фигур, не укладывающихся на прямой. (Говоря здесь о прямой и плоскости, мы понимаем их в наглядном смысле; понятие о них в нашу аксиоматику не включается, так что сказанное представляет собой только пояснение к разделению аксиом на линейные и плоскостные.)

Сформулируем аксиомы.

Линейные аксиомы. Они делятся на три подгруппы.

I. Аксиомы связи. Это те аксиомы, в которых участвуют только такие отношения: точка лежит на отрезке или является его концом.

I_1 (аксиома существования). *Существует хотя бы один отрезок; у каждого отрезка есть два и только два конца; кроме того отрезок содержит другие точки: точки, лежащие на отрезке.*

Говорят, что отрезок соединяет точки, служащие его концами.

I_2 (аксиома проведения отрезка). *Любые две точки можно соединить отрезком и притом только одним.* Другими словами, *для каждых двух точек существует и притом единственный отрезок, концами которого они служат.*

Отрезок с концами A, B обозначается AB. По аксиоме I_1 у каждого отрезка два и только два конца, а по аксиоме I_2 отрезок с данными концами только один. Поэтому всякий отрезок можно обозначать его концами, и это обозначение однозначно. Наряду с выражениями «существует отрезок», «рассмотрим отрезок», мы будем в том же смысле употреблять такие: «можно провести отрезок», «проведем отрезок» и т. п.

I_3 (аксиома деления отрезка). *Всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка, т. е. если C на AB, то отрезки AC, BC образуют вместе отрезок AB и не имеют общих точек кроме C.*

I_4 (аксиома соединения отрезков). *Если точка C лежит на отрезке AB, а B на CD, то отрезки AB, CD образуют отрезок AD.*

II. Аксиомы равенства. Это аксиомы, в которых фигурирует отношение равенства отрезков.

II_1 (аксиома откладывания отрезка). *При любых двух отрезках AB, MN существует и притом единственный отрезок AC, равный MN и налегающий на AB.* Другими словами: *при любых отрезках AB, MN, можно отложить вдоль AB отрезок AC, равный MN, и притом только один.*

II_2 (аксиома сравнения). *Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.*

II_3 (аксиома сложения). *Если C на AB, C_1 на A_1B_1 и $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$.*

II_4 (аксиома Архимеда). *При любых данных отрезках a, $b = AB$ существует содержащий AB отрезок AA_n, на котором есть такие точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что все* *отрезки* $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n$ *равны* a. *Короче — при любых отрезках* a, b *можно отложить вдоль* b *отрезки, равные* a, *столько раз, что они «покроют»* b.

В следующей подгруппе только одна аксиома.

III. Аксиома непрерывности. *Если имеется бесконечная последовательность вложенных отрезков, т. е. если* $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$ *то существует точка, общая всем этим отрезкам* (рис. 18).

Эта аксиома не выводится непосредственно из практики, подобно остальным, поскольку в ней говорится

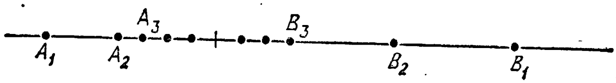

Рис. 18

о бесконечной последовательности отрезков. Поэтому она не обсуждалась в гл. 1, и теперь формулируется отдельно от остальных аксиом. Впрочем, ее смысл достаточно ясен. Представим себе на отрезке AB стягивающиеся отрезки $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$ так, что точки A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... неограниченно сближаются. Если бы между ними не было точки, то отрезок AB не был бы сплошным, непрерывным, тут был бы в нем разрыв. Аксиома утверждает, что это исключено: всякий отрезок сплошной, в нем нет разрывов.

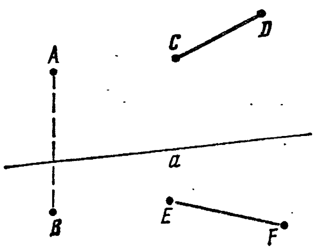

Рис. 19

Плоскостные аксиомы. Этих аксиом всего три, и мы придаем им номера IV_1, IV_2, IV_3.

Пусть a — какой-либо отрезок. Для точек, не лежащих ни на каком отрезке, содержащем a, введем определение.

1. Точки CD *лежат с одной стороны от* a, если отрезок CD не пересекает никакого отрезка, содержащего a.

2. Точки A, B лежат с разных сторон от a, если напротив, отрезок AB пересекает какой-либо отрезок, содержащий a (рис. 19).

IV_1 (аксиома деления плоскости). *По отношению к каждому данному отрезку* a *все точки, не лежащие ни на каком отрезке, содержащем* a, *делятся на* *два класса: в один класс входят точки, лежащие с одной стороны от a, а в другой — точки, лежащие с другой стороны от a, причем в каждом классе есть точки.*

Если мы говорим о точках, «лежащих с данной стороны от отрезка a», то это значит, что они входят в один из указанных классов, и класс задается какой-нибудь его точкой. Можно сказать, что данная сторона от отрезка a «дана» тем, что указывается точка, не лежащая ни на каком отрезке, содержащем a. В этом смысле понятны выражения «с данной стороны от a», «с одной и с другой стороны от a». Именно в этом смысле мы говорим об откладывании угла по данную сторону от какого-либо отрезка.

В ходе наглядного описания, в § 2 гл. 1 мы говорили, что угол «образуется» двумя отрезками с общим концом. В соответствии с этим, определяя угол через аксиоматически введенные понятия, можно сказать, что угол — это пара отрезков с общим концом, эти отрезки — стороны угла, их общий конец — вершина угла. Однако нас интересуют только те свойства угла, которые не изменяются, если вместо этих сторон взять два другие отрезка, на них налегающие, с общим концом в той же вершине. О таких парах отрезков мы говорим, что они представляют (образуют) один и тот же угол и также служат его сторонами, т. е. угол рассматривается с точностью до «удлинения или укорочения» его сторон[1]). Ниже слово угол, а также — стороны угла, будет употребляться в этих двух легко различимых из контекста смыслах, т. е. либо как два данных отрезка с общим концом, либо как любые два отрезка из представляющих один и тот же угол.

Для взаимного расположения двух отрезков с общим концом есть три и только три возможности (как это будет доказано в § 18).

1) Каждый из отрезков лежит целиком с одной стороны от другого, т. е. все его точки, кроме общего конца, лежат с одной стороны. В этом случае мы говорим, что угол, образованный отрезками, *настоящий*.

[1]) Можно, конечно, говорить, что угол — это класс всех указанных пар отрезков. Но нет никакой необходимости фактически рассматривать «весь» этот класс. Нам нужны лишь общие свойства любых двух элементов этого класса.

2) Отрезки служат один продолжением другого, т. е. образуют один отрезок и не имеют общих точек помимо общей вершины; тогда угол *развернутый.*

3) Отрезки налегают один на другой; тогда угол *нулевой.* В дальнейшем мы вовсе исключаем нулевой угол, так что слово «угол» всегда будет обозначать настоящий или развернутый угол.

Угол обозначается либо вершиной, либо сторонами: $\angle O$ — угол с вершиной O, $\angle ab$ угол со сторонами a, b (когда же отрезки обозначаются концами, то угол со сторонами OP, OQ обозначают $\angle POQ$ или $\angle QOP$).

Если отрезок a служит стороной, а его конец A — вершиной настоящего угла, то говорим, что угол отложен от отрезка a, от его конца A. Угол считается отложенным по ту сторону от отрезка a, где лежит его вторая сторона (понятно, кроме вершины A).

Определим равенство углов, используя понятие равенства отрезков.

Поперечиной угла мы называем отрезок с концами на сторонах угла. Поперечины AB, A_1B_1 углов O, O_1 соответственные, если $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$.

Углы равны, если у них есть равные соответственные поперечины. Подчеркнем существенный момент, что равенство углов может определяться любой парой соответственных поперечин. Если речь идет о равенстве углов O, O_1 и в угле O взята поперечина AB, то можно сказать, что мы определяем равенство углов O, O_1, пользуясь поперечиной AB.

Данные определения повторяют те, что были наглядно описаны еще в § 2. Но теперь их нужно понимать как строго выраженные в аксиоматически введенных понятиях. Совершенно также сейчас мы сформулируем аксиому об откладывании угла, дословно повторяя высказанное в § 2 утверждение о реальной операции откладывания угла, но в аксиоме сказанное нужно понимать как выраженное в аксиоматически введенных понятиях.

IV_2 (аксиома откладывания угла). *От каждого отрезка по данную сторону от него, от данного его конца можно отложить угол, равный данному (настоящему) углу. При этом можно пользоваться любой поперечиной и угол будет всегда один и тот же (в смысле данного выше определения «с точностью до продолжения и укорочения сторон»).*

Согласно определениям понятий поперечины и равенства углов, сказанное можно раскрыть следующим образом.

Пусть даны угол POQ и отрезок O_1P_1. Какие точки A, B на сторонах угла POQ ни взять, можно провести отрезок O_1Q_1 с данной стороны от O_1P_1 так, что если A_1

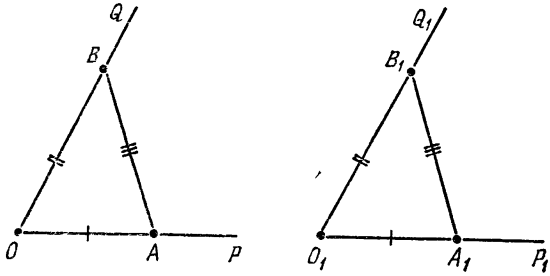

Рис. 20

на O_1P_1, B_1 на O_1Q_1 и $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, то $A_1B_1 = AB$. При этом угол $P_1O_1Q_1$ будет тот же самый (в смысле, указанном в самом определении угла) при любых точках A, B на сторонах угла POQ (рис. 20).

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие образуют вместе один отрезок, не налегая друг на друга (рис. 21).

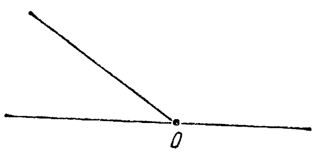

Рис. 21

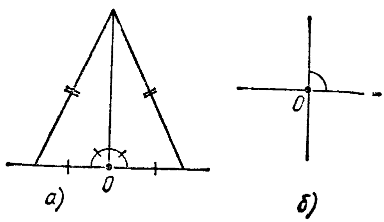

Рис. 22

Угол, равный своему смежному, называется *прямым* (рис. 22). (Ниже мы докажем, что у всякого настоящего угла есть два смежных; какому из двух смежных равен прямой угол, безразлично, ибо будет доказано, что если угол равен одному из своих смежных, то он равен и другому.)

IV. (а к с и о м а п а р а л л е л ь н ы х о т р е з к о в). *Если отрезки AC, BD равны и идут в одну сторону от* *от отрезка AB под прямым углом, то $CD = AB$* (см. рис. 11).

Отрезки AC, BD мы называем *параллельными* в согласии с тем, что было сказано в § 3.

На этом перечень аксиом завершается.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что наши аксиомы повторяют, в некоторых случаях дословно, те утверждения, какие были установлены из опыта в гл. 1. Однако они имеют совершенно разный смысл и значение. Утверждения гл. 1, подобно законам физики, относятся к реальной действительности, хотя бы и представленной в абстрактной форме; они покоятся на опыте. Аксиомы говорят об идеальных мыслимых объектах и служат основанием для построения геометрии. Так камень фундамента одной стороной опирается на землю, а другой — поддерживает здание.

Замечание 2. Разделение аксиом на линейные и плоскостные имеет, в частности, то значение, что на основе одних линейных аксиом можно обосновать измерение отрезков, определить прямую и ввести координаты на прямой, установив тем самым связь «геометрической» прямой с «числовой». Плоскостные же аксиомы вместе с линейными дают основание для построения планиметрии, начиная с равенства треугольников. Все это и составит предмет следующих двух глав.

Но с точки зрения, более близкой практическому смыслу аксиом, их можно разделить иначе — на пять групп.

I. Аксиомы структуры. Мы называем их так потому, что они говорят о строении отрезков и плоскости. В них включаются

(1) Аксиома существования I_1.
(2) Аксиома деления отрезка I_3.
(3) Аксиома соединения отрезков I_4.
(4) Аксиома деления плоскости IV_1.

II. Аксиомы построения. Они говорят о возможности основных построений. В них включаются

(1) Аксиома проведения отрезка I_2.
(2) Аксиома откладывания отрезка II_1.
(3) Аксиома откладывания угла IV_2.

III. Аксиомы измерения. На них, вместе с аксиомой откладывания отрезка, основано измерение отрезков. В них включаются

(1) Аксиома сравнения II_2.

(2) Аксиома сложения II_3.
(3) Аксиома Архимеда II_4.

Две последние группы — IV, V — включают по одной аксиоме.

IV. Аксиома параллельных отрезков.

V. Аксиома непрерывности. Эта аксиома говорит о строении — о непрерывности — прямой и потому относится к аксиомам структуры, но выделяется тем, что в ней говорится о бесконечной последовательности отрезков.

Указанное разделение аксиом по группам несколько условно. Так аксиому Архимеда можно отнести к аксиомам построения, так как она говорит о возможности построить отрезок, составленный из равных данному отрезку a и покрывающий другой данный отрезок b. С другой стороны, аксиомы деления и откладывания отрезка, аксиома непрерывности используются при измерении; аксиома соединения отрезков используется при построении продолжения отрезка...

При упрощенном изложении в том духе, как было у Евклида, все, о чем говорят аксиомы структуры, включая аксиому непрерывности, просто подразумевают как само собой очевидное, обращая внимание на возможности построения и измерения, а также на аксиому параллельных. Такой подход представляется также естественным в школьном изложении — по крайней мере вначале.

§ 9. Об аксиоме откладывания угла

Эта аксиома представляется в сравнении с другими довольно сложной; в ней заключаются большие требования. Мы приняли ее потому, что она выражает практический способ откладывания угла, равного данному, и быстро приводит к нужным выводам. Ее можно разделить на следующие две аксиомы

IV_{2a} (упрощенная аксиома откладывания угла). *От каждого данного отрезка от данного его конца по данную сторону можно отложить угол, равный (по некоторой поперечине) данному настоящему углу, и притом только один.*

В отличие от самой аксиомы IV_2 здесь не подразумевается, что то же можно сделать по любой поперечине, т. е. заранее не исключается, что по одной поперечине угол может отложиться, а по другой — нет, или отложится, но другой.

$\mathrm{IV}_{2б}$ (аксиома равенства поперечин). *Если у двух углов есть равные соответственные поперечины, то и все их соответственные поперечины равны.*

Сказанное в этой аксиоме следует из аксиомы IV_2. Действительно, пусть у углов O, O_1 есть равные соответственные поперечины, так что углы равны. Возьмем на сторонах угла O какие-нибудь точки A, B. Угол O_1, равный O, откладывается согласно аксиоме IV_2 по любой поперечине и, значит, в частности, по данной поперечине AB. Тем самым, соответствующая поперечина угла O_1 равна AB, что и требовалось доказать.

Таким образом, обе аксиомы $\mathrm{IV}_{2а}$ и $\mathrm{IV}_{2б}$ следуют из IV_2.

Обратно, из этих двух аксиом следует аксиома IV_2. Действительно, по аксиоме $\mathrm{IV}_{2а}$ можно отложить угол, равный данному по некоторой поперечине, а аксиома $\mathrm{IV}_{2б}$ обеспечивает, что если угол, равный данному, отложен по одной поперечине, то тем самым он откладывается, можно сказать, само собой по всем поперечинам.

Замечание 1. В аксиоме $\mathrm{IV}_{2б}$ не оговорено, что углы настоящие. Это и не нужно, так как у развернутых углов все соответственные поперечины равны. Именно, если точки AB лежат на сторонах развернутого угла с вершиной O, то вершина O оказывается на отрезке AB. Поэтому из аксиомы сложения сразу следует, что если у развернутых углов O, O_1 поперечины AB, A_1B_1 соответственны, т. е. $AO=A_1O_1$ и $BO=B_1O_1$, то также $AB = A_1B_1$, т. е. поперечины равны. Этим доказана теорема: все развернутые углы равны.

Замечание 2. Аксиомы $\mathrm{IV}_{2а}$, $\mathrm{IV}_{2б}$ можно заменить более простыми, требующими существенно меньше. В них удобно говорить о треугольниках, понимая под треугольником ABC совокупность отрезков AB, AC, BC при условии, что точки A, B, C не лежат на одном отрезке. Отрезки сторон угла OA, OB вместе с поперечиной образуют треугольник OAB, поэтому вместо углов с поперечинами можно говорить о треугольниках. Тогда аксиомы, заменяющие $\mathrm{IV}_{2а}$, $\mathrm{IV}_{2б}$, можно сформулировать так.

(А) *Для каждого треугольника ABC и отрезка A_1B_1 равного AC, с любой стороны от отрезка A_1B_1 существует такая точка C, что $A_1C_1=AC$, $B_1C_1=BC$* (рис. 23).

В отличие от аксиомы IV_{2a} единственность точки C_1 и, стало быть, угла $C_1A_1B_1$, не требуется.

(Б) *Если D — точка на стороне AB треугольника ABC и A_1, B_1, C_1, D_1 — такие точки, что $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, D на A_1B_1 и $A_1D_1 = AD$, то также $C_1D_1 = CD$* (рис. 24).

Для углов это означает: если у углов A, A_1 есть равные соответственные поперечины BC, B_1C_1, то равны также соответственные поперечины CD, C_1D_1 с концами D

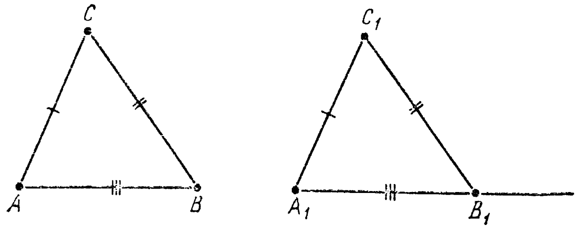

Рис. 23

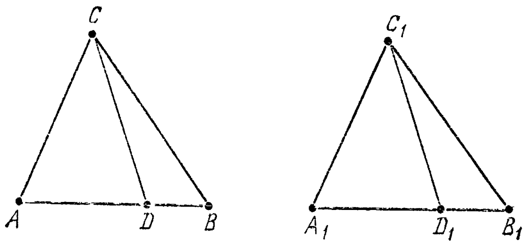

Рис. 24

на AB и D_1 на A_1B_1, т. е. требуется равенство только таких поперечин, для всех других оно тогда выводится.

То, что из аксиом (А), (Б) следует аксиома откладывания угла IV_2, будет доказано позже, в § 34.

§ 10. Основные свойства равенства отрезков и углов

Общее понятие о равенстве подразумевает, что отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. для всяких элементов a, b, c, для которых имеет место это отношение,

(1) $a = a$,

(2) если $a = b$, то $b = a$,

(3) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Стало быть, для оправдания введенного понятия равенства для отрезков и углов нужно доказать выполнение свойств (1)—(3).

Лемма 1. *Отношение равенства отрезков рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Симметричность заключена в самой формулировке — «два отрезка равны друг другу».

Транзитивность заключается в аксиоме сравнения. Эта аксиома буквально означает: если $a = c$ и $b = c$, то $a = b$, но по симметричности, если $b = c$, то $c = b$, и потому тут выражена транзитивность.

Остается доказать рефлексивность, т. е. что каждый отрезок равен самому себе. Пусть дан отрезок a. По аксиоме откладывания можно где-нибудь отложить равный ему отрезок[1]) b, так что будет $a = b$; отсюда по симметричности $b = a$, и из этих двух равенств по транзитивности $a = a$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Отношение равенства углов рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Докажем рефлексивность. Пусть дан какой-либо угол O. На его сторонах возьмем какие-либо точки A, B. По рефлексивности равенства отрезков $OA = OA$, $OB = OB$, $AB = AB$. Следовательно (по определению равенства углов), угол O равен самому себе.

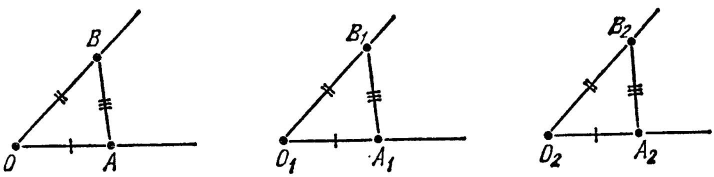

Рис. 25

Симметричность равенства углов заключена в определении ввиду симметричности равенства отрезков.

Докажем транзитивность. Пусть $\angle O = \angle O_1$ и $\angle O_1 = \angle O_2$. По аксиоме откладывания угла можно отложить угол, равный данному, по любой поперечине. Поэтому можно считать, что на сторонах данных углов есть та-

[1]) Например, по аксиомам I_2, I_3 на отрезке $a = AB$ существует точка C, и по аксиоме II_1 можно вдоль отрезка CB от точки C отложить отрезок, равный a.

кие точки A, B; A_1, B_1; A_2, B_2, что $OA = O_1A_1$, $O_1A_1 = O_2A_2$ и то же для точек B, а также $AB = A_1B_1$, $A_1B_1 = A_2B_2$ (рис. 25). Но отсюда по транзитивности равенства отрезков $OA = O_2A_2$, $OB = O_2B_2$, $AB = A_2B_2$ и тем самым по определению $\angle O = \angle O_2$, что и требовалось доказать.

§ 11. Понятие фигуры

В геометрии рассматриваются фигуры, составленные не только из отрезков (например, окружности и др.). Поэтому если строить геометрию на аксиомах, то непременно встает вопрос: как понимать, что такое фигура? Наглядное представление, описанное в § 6 гл. 1, нужно заменить более точным аксиоматическим определением фигуры.

Правда, принято определение: «фигурой называется любое множество точек»[1]). Но на это можно спросить: а что такое множество? Ответ, который обычно дают, сводится к тому, что множество — это, вообще, совокупность. Но в каком смысле отрезок есть совокупность точек? Более глубокий взгляд на понятие множества уже давно привел к аксиоматике теории множеств[2]). Но нам это не нужно, мы упомянули об этом только для того, чтобы подчеркнуть необходимость дать определение понятия фигуры, если мы всерьез имеем в виду строить геометрию на основе аксиом.

Можно сказать, что *фигурой называется то, что обладает свойствами, указанными далее в аксиомах.*

Аксиоматика фигуры.

Основные объекты: 1) *точки*; 2) *фигуры.*

Основное отношение: точка *принадлежит* фигуре (принадлежность точки A фигуре F обозначается, как обычно: $A \in F$).

Аксиомы фигуры (их всего три).

1. *Фигура определяется принадлежащими ей точками, т. е. если имеются фигуры F_1 и F_2 такие, что каждая точка, принадлежащая одной из них, принадлежит*

[1]) См., хотя бы учебник: Геометрия 6—8/Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1979, с. 10.

[2]) При этом выяснилось, что возможны разные аксиоматики и, соответственно, разные варианты теории множеств. См., например: Аксиоматическая теория множеств // Математическая энциклопедия. Т. I.— М.: Советская энциклопедия, 1977.

также другой, и обратно, то F_1, F_2 — одна и та же фигура.

2. *Точка есть фигура; она принадлежит себе, и никакие другие точки ей не принадлежат.*

3. *Для всякого условия, налагаемого на точки и проверяемого (в принципе) для каждой точки — выполняется оно для нее или нет — существует фигура, содержащая все точки с данным условием и никакие другие.*

Имеется в виду, что условия, о которых здесь говорится, выражаются через основные понятия принятой аксиоматики геометрии (и, разумеется, применяются понятия аксиоматики фигуры — понятия точки и принадлежности). Если в аксиоматике основным объектом является отрезок (или прямая и т. п.[1])), то условие: «точка принадлежит данному отрезку» считается проверяемым[2]), так что отрезок согласно аксиоме 3 является фигурой, поскольку он удовлетворяет также аксиоме 1 (и аналогично для прямой и т. п.).

Поясним высказанные аксиомы фигуры.

Первая аксиома не только соответствует представлению о фигуре, но, что важно в самой отвлеченной геометрии, выражает то, как мы судим о совпадении или различии фигур, определяемых разными способами. Мы проверяем, является ли точка одной фигуры также точкой другой, и обратно. Например, допустим, фигура F задана геометрическим условием, и мы нашли ее уравнение в координатах $f(x, y) = 0$. Мы говорим, что уравнение представляет фигуру, если координаты каждой точки фигуры удовлетворяют уравнению и обратно: каждая пара x, y, удовлетворяющая уравнению, служит координатами некоторой точки фигуры F. Совершенно также проверяется совпадение фигур, определяемых разными геометрическими условиями. Точно так же отображение одной фигуры на другую определяется *поточечно*.

Вторая аксиома — «аксиома точки» — едва ли требует пояснений: отметим лишь, что она, можно сказать, по-

---

[1]) Нельзя сказать, что всякий основной объект аксиоматики есть фигура: в некоторых случаях есть основные объекты, не являющиеся фигурами, так, например, «наложение» (или «движение», «перемещение»), оно — «объект», так как обозначается именем существительным и может быть определено как множество пар точек.

[2]) Подробнее: точка отрезка (т. е. лежащая на отрезке или являющаяся его концом) считается принадлежащей отрезку в смысле аксиоматики фигуры, и это условие по определению проверяемо.

вторяет определение точки, содержащееся в «Началах» Евклида: «точка есть то, что не имеет частей».

Третья аксиома может быть названа «аксиомой геометрического места», потому что она выражает то же самое, что выражает его определение, данное, например, в классическом учебнике А. П. Киселева: «Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется... вообще такая фигура, которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной не обладающей им»[1]).

Понятно, точки сами по себе не обладают никакими свойствами. То или иное «свойство» точки определяется ее отношением к другим точкам или, вообще,— фигурам. Скажем, «свойство» точек окружности — это равенство их расстояний от данной точки.

«Свойством» точки является, в частности, ее принадлежность к уже определенной фигуре или к такой, которая служит основным объектом. У нас основные «свойства» точки — это быть концом какого-либо отрезка или лежать на данном отрезке. В общем, «свойства» — это условия, каким удовлетворяют точки. То, что эти условия, как сказано, выражаются через основные понятия, не означает, конечно, что они должны выражаться через них непосредственно, нужно только, чтобы так или иначе применяемые понятия в конечном итоге сводились к основным.

В аксиоме 3 говорится о проверяемых условиях. В этом есть очевидная неопределенность: какие условия считать в принципе проверяемыми?

Для элементарной геометрии естественно считать в принципе проверяемыми условия, которые формулируются в терминах основных объектов и отношений, так что проверка сводится к проверке выполнения *конечного числа* таких отношений. При этом проверка может включать построения, принятые в аксиомах, как откладывание отрезка, равного данному.

Так, в выбранной нами аксиоматике в числе основных объектов были точки и отрезки. (Разумеется, в аксиоматике фигуры идет речь о тех же самых точках.) Была определена через основные понятия принадлежность точки отрезку. Поэтому принадлежность точки от-

---

[1]) Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1980, с. 31. Многоточием мы отметили указание на частные виды фигур: линии и поверхности.

резку в принципе проверяема, так что, как уже было сказано, *отрезок есть фигура.*

В нашей аксиоматике есть аксиома об откладывании отрезка. Поэтому проверка условия может включать конечное число построений отрезков, равных данным или уже построенным. Например, эллипс с фокусами O_1, O_2 можно определить как геометрическое место таких точек M, что отрезок, составленный из отрезков MO_1, MO_2, равен данному отрезку AB. Проверить это условие можно, откладывая на AB от точки A отрезок, равный MO_1, а от точки B — отрезок, равный MO_2. Следовательно, эллипс есть фигура в смысле элементарной геометрии. То же относится и к другим коническим сечениям. (Но, скажем, множество точек с иррациональными координатами на координатной оси не является фигурой в смысле элементарной геометрии.)

Условие, налагаемое на точки, может оказываться таким, что оно не выполняется ни для какой точки X (например, условие, что сумма расстояний $AX+XB < AB$). Аксиома 3 это логически не исключает. В таком случае фигура, определяемая этим условием, пустая — не содержит точек. Формально удобно отнести ее к фигурам (как, например, среди кривых второго порядка числится «мнимый эллипс»).

Вместо слова «фигура» мы будем также говорить: «геометрическое место точек» или короче — «множество точек», имея в виду то же самое. Удобнее сказать «множество точек с каким-то свойством», чем «фигура, содержащая все точки с данным свойством и не содержащая никаких других». Говоря «множесто таких точек, что...», мы *подразумеваем*, что это множество *всех* таких точек.

Определение фигуры можно применить к определению таких понятий, как объединение фигур, их пересечение и др.

Говорят, что фигура F' *содержится* в фигуре F, если всякая ее точка принадлежит также фигуре F. С точки зрения аксиом фигуры это определение осмысленно, так как предполагается, что условия, определяющие точки фигур F и F', проверяемы.

Объединением фигур называется фигура, которой принадлежат все точки этих фигур и никакие другие.

Пересечением данных *фигур* называется фигура, которой принадлежат те и только те точки, каждая из которых содержится во всех данных фигурах.

Опять-таки, поскольку условия, определяющие данные фигуры, проверяемы, постольку проверяемо и условие, определяющее их объединение или пересечение, если речь идет о *конечном числе* фигур; для бесконечной их совокупности проверяемость может стать сомнительной, но может быть и несомненной. Дадим, например, определение круга.

Кругом называется объединение всевозможных равных отрезков, которые имеют общий конец — *центр круга* O. Круг задается указанием центра O и *радиуса* — отрезка, которому должны быть равны отрезки, образующие круг.

Это определение осмысленно, так как для любой точки легко проверить, принадлежит она данному кругу или нет. Действительно, если A — данная точка, то достаточно провести отрезок OA и отложить вдоль него отрезок, равный радиусу (что возможно согласно аксиоме). Если этот отрезок будет содержать OA, то точка A принадлежит кругу, иначе — не принадлежит.

Достаточно строгое построение возможно только тогда, когда то, что говорится, осмысленно и допустимо по принятым условиям. Это полезно подчеркнуть, так как об этом нередко забывают, подавая под видом аксиоматического изложения то, что не оговорено в аксиомах.

В качестве еще одного примера фигуры определим луч. Наглядно он представляется как фигура, получающаяся при неограниченном продолжении отрезка за один из его концов. Точно это можно выразить так. *Лучом* AB называется объединение всех отрезков AM, содержащих отрезок AB. Точка A называется *началом луча.*

Это определение, при его кажущейся ясности, не удовлетворяет, однако, требованию аксиомы 3. Как определить для данной точки N, принадлежит она лучу AB или нет? Проводить разные отрезки AM и смотреть, не попадает ли она на один из них? Такая процедура неэффективна. Но можно доказать, что точка N принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда она либо принадлежит отрезку AB, либо точка B лежит на отрезке AN. (Так что если точки N нет на отрезке AB, то достаточно провести один отрезок AN и проверить, принадлежит ли ему B.) Сказанное довольно очевидно, но нужно строгое доказательство из аксиом; оно будет дано в § 16; найти его во всей строгости может служить читателю хорошей задачей.

Вот еще пример. Назовем *прямой* AB фигуру, являющуюся объединением всех отрезков, содержащих точки A и B. Хотя здесь объединяется бесконечно много фигур, но, чтобы проверить, принадлежит ли точка N прямой AB, достаточно проверить, составляют ли отрезки AB и AN один отрезок (см. ниже, конец § 16).

В заключение обратимся еще раз к понятию угла. Его отношение к понятию фигуры непросто. По данному в § 8 определению сторонами угла AOB являются любые отрезки OM, ON, проведенные вдоль отрезков OA, OB. Отрезок OM, проведенный вдоль OA, по определению, либо содержится в OA, либо содержит OA. Поэтому объединение всех таких отрезков — то же, что объединение всех отрезков OM, содержащих OA, т. е. оно представляет собою луч OA. Совершенно так же объединение отрезков ON, проведенных вдоль отрезка OB, представляет луч OB.

Таким образом, стороны угла AOB образуют в объединении два луча: луч OA и луч OB. Поэтому можно сказать, что этот угол задается парой лучей OA, OB. Это дает повод к распространенному определению: часто говорят, что угол AOB — это просто пара лучей OA, OB. (Нулевой угол представляется одним лучом, но мы его не рассматриваем.)

В таком определении угол — не множество точек, не фигура, получаемая объединением лучей, а множество лучей — двух лучей. Это логическое отличие в определении оказывается реальным отличием для развернутого угла. Объединение его лучей представляет собой прямую, а не угол, так как на прямой вершина его никак не выделяется и любая его точка может служить вершиной развернутого угла со сторонами на той же прямой. Для неразвернутого угла положение иное: никакие другие два луча с общим началом не содержатся в объединении его сторон. Развернутый угол можно понимать как «фигуру», только обобщив понятие фигуры.

Аналогичное явление мы встречаем в понятии ломаной. Если она определяется как последовательность отрезков — ее звеньев A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, то по такому определению она является не фигурой, а последовательностью отрезков. Объединение ее звеньев может быть таким же, как у ломаной с другими звеньями, например, когда два соседних звена образуют один отрезок или два звена налегают одно на другое.

В заключение, подводя итог, сформулируем третью аксиому фигуры для элементарной геометрии.

Формулировка относится к принятой нами аксиоматике или вообще ко всякой аксиоматике геометрии, которую можно назвать чисто геометрической. Аксиоматику мы называем чисто геометрической, если в ней не фигурируют ни действительные числа, ни величины, а только такие объекты и отношения, какие можно считать чисто геометрическими.

Условие, налагаемое на точки, назовем элементарным, если оно выражено в понятиях аксиоматики так, что его проверка для каждой точки проходит в конечное число шагов; при каждом шаге либо устанавливается одно из основных отношений, либо производится «построение» из тех, какие допущены аксиомами.

Аксиома геометрического места (в элементарной геометрии). *При данной геометрической аксиоматике для всякого элементарного условия, налагаемого на точки, существует фигура, содержащая все точки с данным условием и никакие другие.*

Можно, конечно, понимать «проверяемое условие» в более общем смысле, когда оно не будет элементарным, не проверяется в конечное число шагов. Например, можно мыслить условия, требующие предельного перехода, когда точка фиксируется на основании аксиомы непрерывности. Можно считать проверяемым условие, что отрезок имеет данную численную длину при данной единице измерения. Это тем более естественно, когда понятие длины входит в аксиомы.

Одним словом, понятие проверяемости условия, а значит, и понятие фигуры допускает разные градации. Но первая и основная из них — та, которая установлена нашим определением элементарного условия и соответствующего ему понятия фигуры.

В этой связи можно дать следующее определение. *Элементарной называется геометрия, предмет которой составляют фигуры, определяемые элементарными условиями* (как они определены выше).

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЯ ОТРЕЗКОВ

§ 12. О продолжении и наложении отрезков

Продолжение отрезка — это то же, что построение содержащего его и отличного от него отрезка; продолжение отрезка AB за один конец B — это отрезок AC, содержащий AB и отличный от него (рис. 26, *а*); продолжение за оба конца — это отрезок CD, содержащий AB так, что оба конца A, B лежат на CD (рис. 26, *б*).

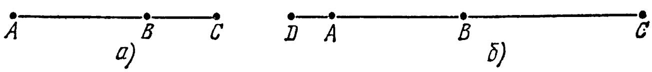

Рис. 26

Теорема (о продолжении отрезка). *Каждый отрезок можно продолжить за любой из концов на отрезок, равный любому данному.*

Эта теорема кажется очевидной. Действительно, пусть дан отрезок AB. Возьмем на нем точку C; она делит его на отрезки AC, CB. Отложим вдоль CB отрезок CD, равный AB. Представляется очевидным, что он будет выступать из AB и тем самым даст продолжение отрезка AB[1]. Однако чтобы это доказать, нам придется пойти обходным путем, причем здесь не обойтись без аксиомы Архимеда.

Доказательство. По аксиоме Архимеда вдоль CB можно отложить последовательно некоторое число отрезков, равных AB так, что они покроют CB. Пусть DE — последний из этих отрезков. Не может быть, чтобы точка E совпадала с B, так как от B отложен отре-

[1]) Здесь мы последовательно пользовались аксиомами: I_1 (существование точки на отрезке), I_3 (деления отрезка), II_1 (откладывания отрезка). Мы не всегда будем ссылаться на аксиомы, которыми будем пользоваться. Читателю полезно на каждом шаге задавать вопрос: «а это на каком основании?».

зок $BA = AB$, а по аксиоме откладывания такой отрезок только один. Стало быть, точка E отлична от B и, значит, отрезок DE выступает из AB (рис. 27). По аксиоме соединения отрезок DE образует с AB один отрезок AE. Тем самым AB продолжен за конец B.

Докажем теперь, что отрезок можно продолжить на отрезок, равный данному. Пусть имеется отрезок AB.

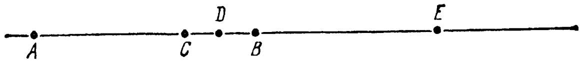

Рис. 27

По доказанному его можно продолжить на какой-то отрезок BC так, что получится отрезок $AC = AB \cup BC$. По аксиоме откладывания вдоль отрезка BC можно отложить отрезок BD, равный какому угодно данному. Если при этом точка D совпадает с C, то отрезок AB уже продолжен как требуется.

Допустим, точка C оказалась на BD (рис. 28). Тогда в силу аксиомы соединения AC и BD образуют один

Рис. 28

отрезок AD. Он состоит из отрезка AB и прибавленного к нему отрезка BD, равного данному.

Рассмотрим случай, когда точка D лежит на BC (рис. 29). Тогда D лежит также на AC и по аксиоме деления отрезка делит отрезок AC на AD и DC. При

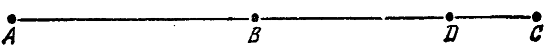

Рис. 29

этом точка B оказывается на AD (на DC она оказаться не может, так как тогда $BC \subset DC$ вопреки тому, что D на BC). Таким образом, отрезок AD состоит из AB и BD, а это значит, что отрезок AB продолжен на отрезок BD. Теорема доказана полностью.

Следствие 1. *Каждый отрезок можно продолжить за оба конца на отрезки, равные данным.*

Следствие 2. *Каждый угол имеет два смежных с ним угла.*

Лемма 1. *Если у отрезков AB, AC есть общая точка, кроме A, то они налегают один на другой. Отрезки, отложенные вдоль одного и того же отрезка, налегают друг на друга.*

Доказательство. Пусть у отрезков AB, AC есть общая точка D, отличная от A (рис. 30). Если она — их общий конец, так что точки B, C, D совпадают, то и отрезки AB, AC совпадают (так как по аксиоме проведения отрезка отрезок с данными концами только один).

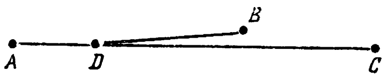

Рис. 30. Это невозможно!

Допустим, точка D отлична, например, от C, тем самым она лежит на AC. По аксиоме деления AC содержит AD. Отрезок AB тоже содержит AD (или совпадает с ним, если D совпадает с B).

Отложим отрезок AB_1, равный AB, вдоль AC (рис. 31). Так как $AC \supset AD$, то AB_1 отложен также вдоль AD. Но так как $AD \subset AB$, то и AB отложен вдоль AD. По

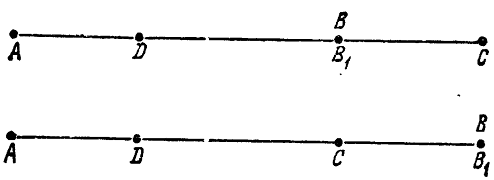

Рис. 31

аксиоме откладывания, вдоль данного отрезка можно отложить только один отрезок, равный данному. Следовательно, AB_1 совпадает с AB. Тем самым отрезок AB отложен вдоль AC, что и требовалось доказать.

Отметим еще лемму о расположении точек на отрезке.

Лемма 2. *Если C на AB и D на CB, то C на AD.*

Доказательство. Пусть C на AB и D на CB. Из аксиомы деления отрезка следует, что тогда D на AB (так как $CB \subset AB$) и C либо на AD, либо на DB. Допустим, что C на DB. Тогда по аксиоме деления отрезка $CB \subset DB$ и D не лежит на CB. Но это противоречит условию. Следовательно, не может быть C на DB и, значит, C на AD, что и требовалось доказать.

Задача. Доказать, что если на отрезке AB отмечено n точек, то их можно перенумеровать $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nB$ не имеют попарно общих точек кроме концов и при всяком m точки $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{m-1}$ лежат на AA_m.

§ 13. Алгебра отрезков

Точка, лежащая на отрезке a, делит его согласно аксиоме деления на два отрезка, и мы говорим, что отрезок a составлен из них или является их суммой. Обозначая эти отрезки b и c, пишем $a = b + c$ (рис. 32).

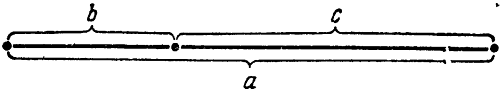

Рис. 32

По аксиоме сложения, если $b = b_1$ и $c = c_1$, то $b + c =$ $= b_1 + c_1$. Поэтому можно обобщить понятие суммы отрезков.

Определение. Мы говорим, что отрезок a представляет *сумму отрезков* b и c и пишем $a = b + c$, если отрезок a составлен из отрезков, равных b и c, или, вообще, равен отрезку, составленному из таких отрезков.

Это вполне соответствует практическому «сложению» реальных отрезков (т. е. вытянутых предметов, таких как стержни, куски проволоки и т. п.). При этом где бы мы ни складывали данные отрезки, получающиеся отрезки будут равны. Геометрически это означает, что по аксиоме сложения отрезки, получающиеся при сложении двух данных отрезков, равны друг другу.

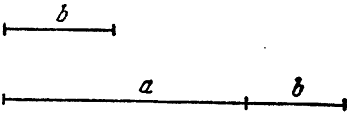

Рис. 33

При этом важно, что любые два отрезка можно сложить. Действительно, пусть даны два отрезка a, b. Тогда отрезок a можно продолжить за один из концов на отрезок, равный b (рис. 33). В результате получаем отрезок, составленный из a и отрезка, равного b, т. е. согласно определению — сумму $a + b$.

Мы можем дальше уже не упоминать о продолжении данного отрезка, а говорить просто, что один отрезок прикладывается к другому.

Если n — натуральное число, то определяем

$$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}$$

и $\frac{1}{n}a$ как такой отрезок, что $n\left(\frac{1}{n}a\right) = a$. Отсюда естественно определяется $\frac{m}{n}a$ как отрезок $m\left(\frac{1}{n}a\right)$, при этом $m\left(\frac{1}{n}a\right) = \frac{1}{n}(ma)$[1]).

Вычитание отрезков определяется как операция, обратная сложению.

Определение. Мы говорим, что отрезок c есть *разность отрезков a и b* (получается вычитанием отрезка b из a) и пишем $c = a - b$, если $a = b + c$ (рис. 34).

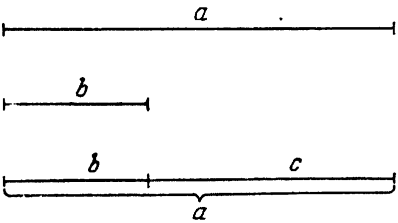

Рис. 34

Определение. Если для отрезков a и b существует такой отрезок c, что $a = b + c$, то мы говорим, что a *больше* b или, что то же, b *меньше* a, и пишем соответственно: $a > b$ или $b < a$.

Наглядно отрезок a больше b, если на отрезке a от его конца укладывается отрезок, равный b, не покрывая a; остаток представляет тогда разность $a - b$.

Для оправдания этих определений надо доказать, что указанные в определениях соотношения отрезков сохраняются при замене их любыми им равными.

Лемма. *Если $a > b$ и $a_1 = a$, $b_1 = b$, то также $a_1 > b_1$ и $a_1 - b_1 = a - b$ (т. е. если от равных отнять равные, то получаются равные).*

Доказательство. Пусть $a > b$, так что имеется такой отрезок c, что $a = b + c$. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$. Тогда по аксиоме сложения $a = b + c = b_1 + c$, и так как $a = a_1$, то получаем $a_1 = b_1 + c$, т. е. $a_1 > b_1$. Кроме того, так как $a = b + c$ и $a_1 = b_1 + c$, то по определению разности $c = a - b$ и $c = a_1 - b_1$, т. е. $a_1 - b_1 = a - b$, что и требовалось доказать.

---

[1]) Не предполагается, что отрезок $\frac{1}{n}a$ обязательно существует; это еще надо доказать. Последнее равенство нужно, конечно, также доказать, но мы оставляем это читателю.

В итоге мы получили такой результат («алгебру отрезков»).

Для отрезков, наряду с основным отношением равенства, определены операции сложения, вычитания и отношение «больше — меньше», в которых любой отрезок замещим равным. При этом оказывается, что эти операции и отношение обладают такими же свойствами, как для положительных чисел. Именно: прежде всего выполняется следующее.

1. *Для любых двух отрезков определена их сумма.*

2. *Сложение обладает свойствами переместительности и сочетательности (коммутативности и ассоциативности) т. е.:*

(1) $a+b=b+a$,
(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Первое означает, что если к отрезку, равному a, приложить отрезок, равный b, то получится тот же отрезок, как если поступить наоборот, т. е. если от точки A отложить $AB=a$ и затем $BC=b$, или сначала $AD=b$,

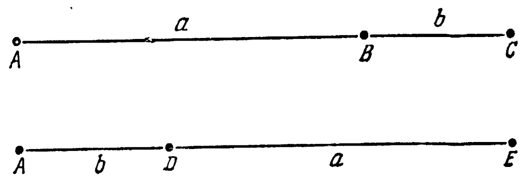

Рис. 35

а потом $DE=a$, то полученный отрезок AE будет тот же, т. е. AC (рис. 35).

Действительно, отрезок AC (т. е. CA) составлен из $CB=b$ и $BA=a$, т. е. так же, как отрезок AE, и,

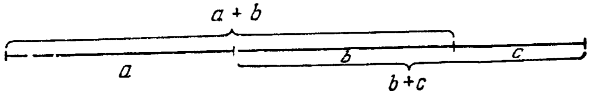

Рис. 36

значит, равен AE. Но оба отложены от точки A один вдоль другого и, значит, совпадают.

Сочетательный закон непосредственно очевиден, поскольку приложенные один за другим отрезки можно объединять (рис. 36).

Благодаря переместительному и сочетательному законам складываемые отрезки можно переставлять в любом порядке и объединять, а сумма при этом не изменится.

Это позволяет установить другие свойства сложения и отношения «больше — меньше».

3. *Сумма больше каждого из слагаемых.*

4. *Если* $a > b$, $b > c$, *то* $a > c$.

5. *Если* $a \geqslant c$, $b > d$, *то* $a + b > c + d$.[1])

6. *При всяком натуральном* n, *если* $a = b$, *то* $na = nb$, *а если* $a > b$, *то* $na > nb$.

7. *При всяком натуральном* n, *если* $a = b$, *то* $(1/n)a = (1/n)b$, *а если* $a > b$, *то* $(1/n)a > (1/n)b$.

Докажем эти свойства.

3. Пусть отрезок a есть сумма некоторых отрезков, среди которых есть отрезок b. Пользуясь переместительным законом, переставим отрезок b в сумме на первое место, а остальные отрезки объединим в один отрезок c, пользуясь сочетательным законом. В результате получится $a = b + c$, т. е. $a > b$.

4. Пусть $a > b$, $b > c$. Это значит, что $a = b + d$ и $b = c + e$. Тем самым, $a = (c + e) + d = c + (e + d)$, т. е. $a > c$.

Доказательство свойства 5 проводится аналогично, а свойства 6, 7 следуют из 5 и того, что суммы равных отрезков равны.

§ 14. Деление отрезка пополам

Потребность найти середину отрезка возникает при многих построениях. В школьных курсах геометрии середину отрезка обычно находят с помощью построения на плоскости, то есть выходя за пределы прямой. Однако можно доказать существование у отрезка середины и не выходя в плоскость, опираясь только на линейные аксиомы, включая однако аксиому непрерывности. Такое доказательство представляет вполне реальный прием, каким можно найти середину отрезка с любой степенью приближения.

Т е о р е м а. *У каждого отрезка есть середина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан отрезок AB; берем на нем точку C (по аксиоме I_1). Если $AC = BC$, то точ-

---

[1]) $a \geqslant c$ означает: либо $a > c$, либо $a = c$, т. е. неверно, что $a < c$. Аналогичный смысл имеет для отрезков неравенство $a \leqslant c$.

ка C и есть середина отрезка AB. Допустим, что $AC \neq BC$ и, для определенности, что $AC < BC$. Тогда откладываем на BA от точки B отрезок $BC_1 = AC$ (рис. 37). Если $CC_1 \leqslant 2AC$, то на этом останавливаемся. В противном случае откладываем на отрезке CC_1 от его концов C,

Рис. 37

C_1 отрезки CC_2, C_1C_3, равные AC. Так получаем отрезки: $AC_2 = BC_3$ и C_2C_3 (рис. 38). Если $C_2C_3 \leqslant 2AC$, то останавливаемся; в противном случае продолжаем аналогичное построение от точек C_2, C_3.

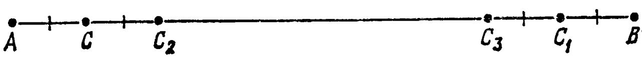

Рис. 38

По аксиоме Архимеда отрезок AB можно покрыть конечным числом отрезков, равных AC. Поэтому рано или поздно мы придем к тому, что получится отрезок

Рис. 39

$C_kC_{k+1} \leqslant 2AC$, причем, как ясно из построения $AC_k = BC_{k+1}$. Обозначив C_k, C_{k+1} через A_1, B_1, имеем (рис. 39)

$$AA_1 = BB_1 \geqslant AC, \qquad A_1B_1 \leqslant 2AC \leqslant 2AA_1.$$

Отсюда, так как $A_1B_1 = AB - (AA_1 + BB_1)$, получаем

$$A_1B_1 = AB - 2AA_1 \leqslant AB - A_1B_1,$$

откуда

$$2A_1B_1 < AB.$$

Применяя тот же процесс к отрезку A_1B_1, получим отрезки

$$A_1A_2 = B_1B_2, \qquad 2A_2B_2 \leqslant A_1B_1.$$

И вместе с предыдущим

$$AA_2 = BB_2, \qquad 4A_2B_2 \leqslant AB.$$

Продолжая этот процесс, мы можем получить середину какого-то очередного отрезка A_kB_k, когда точки A_{k+1}, B_{k+1} окажутся совпадающими, и тем самым получим середину самого отрезка AB. Иначе процесс будет продолжаться неограниченно, и мы получим последовательность отрезков

$$AA_1 \subset AA_2 \subset AA_3 \subset \ldots, \quad BB_1 \subset BB_2 \subset BB_3 \subset \ldots$$

При этом будет при всех n

$$AA_n = BB_n, \quad 2^n A_nB_n \leqslant AB.$$

По аксиоме непрерывности существует точка D, содержащаяся во всех отрезках A_nB_n, так что при всех n

$$AD \supset AA_n, \qquad BD \supset BB_n.$$

Точка D и будет серединой отрезка AB, т. е. $AD = BD$. Докажем это.

Допустим, что $AD \neq BD$ и для определенности $AD > BD$, т. е. $AD = BD + DE$. Это значит, что при всяком n

$$AA_n + A_nD = BB_n + B_nD + DE.$$

А так как $AA_n = BB_n$, то

$$A_nD = B_nD + DE > DE.$$

Но точка D лежит на отрезке A_nB_n, а поэтому

$$2^n A_nD < 2^n A_nB_n \leqslant AB.$$

Вместе с предыдущим неравенством это даст

$$2^n DE < AB.$$

Такое неравенство получается при всяком n, но оно противоречит аксиоме Архимеда. Это противоречие доказывает, что необходимо $AD = BD$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Изложенный процесс воспроизводит в идеализированной форме то, как на самом деле можно находить середину реального отрезка, конечно, лишь с некоторой точностью. Имеется отрезок AB и более короткий отрезок a (скажем, длинное бревно AB и палка a, или растягиваемые пальцы — «четверть» и т. п.). Откладывая отрезок a от концов отрезка AB, дойдем до того, что отложив его одно и то же число раз от обоих концов, получим отрезок A_1B_1, в котором a уже не уместится дважды: от A_1 и от B_1. Тогда можно применить к отрезку A_1B_1 тот же прием, но с меньшим отрезком a_1 и т. д.

Применяемые в геометрии приемы, требующие выхода в плоскость, дают построение середины отрезка в конечное число шагов (такое построение без аксиомы непрерывности, основанное на наших аксиомах, указано в § 18). Из одних линейных аксиом без аксиомы непрерывности доказать существование середины у каждого отрезка невозможно.

§ 15. Измерение отрезков

Хорошо известный практический процесс измерения длины путем откладывания масштаба и его долей, представленный в идеализированном виде, приводит к следующему результату.

Теорема 1 (о длине отрезка). *При произвольно выбранном отрезке e каждому отрезку a однозначно сопоставляется положительное число $l(a)$ так, что выполняются три условия:*

(I) *если $a=b$, то $l(a)=l(b)$;*

(II) $l(a+b)=l(a)+l(b)$ *(т. е. если $c=a+b$, то $l(c)=l(a)+l(b)$);*

(III) $l(e)=1$.

Число $l(a)$ называется *длиной отрезка* в масштабе e или при единице e (как говорят «длина 5 см» и т. п.).

Доказательству предпошлем замечание, как бы обратное аксиоме Архимеда.

Лемма 1. *Для любых отрезков a, b найдется такое натуральное n, что отрезок $(1/n)b$ существует и $a>(1/n)b$.*

(На самом деле отрезок $(1/n)b$ существует при любом натуральном n, но это будет доказано позже.)

Доказательство. По теореме предыдущего параграфа для любого натурального m существует отрезок $(1/2^m)b$. По аксиоме Архимеда при данных отрезках a, b есть такое $n=2^m$, что $na>b$. Тогда $a>(1/n)b$ (так как если $c>b$, то $(1/n)c>(1/n)b$, так что при $c=na$, $a=(1/n)c>(1/n)b$). Лемма доказана.

Сформулированная теорема состоит из двух частей: одна утверждает существование длины $l(a)$, другая — ее единственность при данном масштабе e. Докажем первую часть.

Теорема 1а. *При данном отрезке e каждому отрезку a можно сопоставить положительное число $l(a)$ так, что выполнены условия* (I)—(III).

Доказательство. Пусть выбран отрезок e. Возьмем какой-нибудь отрезок a и $n=2^p$, где p — натуральное, такое, чтобы было $(1/n)e \leqslant a$ (по доказанной лемме это возможно). Положим $(1/n)e=e_1$, так что отрезок e_1 укладывается на a хотя бы один раз. Тогда по аксиоме Архимеда существует такое натуральное m, что $me_1 \leqslant \leqslant a < (m+1)e_1$,

$$(m/n)e \leqslant a < ((m+1)/n)e.$$

Числа m/n, $(m+1)/n$ оценивают длину отрезка a при единице e снизу и сверху.

Возьмем теперь отрезок $e_2=(1/n_1)e$ с $n_1=2n$; аналогично получим $m_1e_2 \leqslant a < (m_1+1)e_2$, т. е.

$$(m_1/n_1)e \leqslant a < ((m_1+1)/n_1)e.$$

Так получаем более точную оценку длины снизу и сверху.

Если отрезок a был больше $(m/n)e$, то на разности $a-(m/n)e=a-me_1$ может уложиться еще один или несколько отрезков e_2 (но может и ни одного). Поэтому

$$m_1e_2 \geqslant me_1, \quad (m_1/n_1)e \geqslant (m/n)e, \quad m_1/n_1 \geqslant m/n.$$

Аналогично, рассматривая разность $(m+1)e_1-a$, заключаем, что она может замениться только меньшей. Поэтому

$$(m_1+1)e_2 \leqslant (m+1)e_1,$$

откуда, поскольку $e_2=e/n_1$, $e_1=e/n$,

$$(m_1+1)/n_1 \leqslant (m+1)n.$$

Переходя от n_1 к числу $n_2=2n_1$, получим аналогичные неравенства. Так, продолжая этот процесс, получим две последовательности чисел, оценивающих длину отрезка a снизу и сверху:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{m_1}{n_1} \leqslant \frac{m_2}{n_2} \leqslant \ldots, \quad \frac{m+1}{n} \geqslant \frac{m_1+1}{n_1} \geqslant \frac{m_2+1}{n_2} \geqslant \ldots \tag{1}$$

Общий предел этих последовательностей принимаем за длину $l(a)$ отрезка a. Это такое число, что при всех номерах k[1])

$$m_k/n_k \leqslant l(a) < (m_k+1)/n_k. \tag{2}$$

Докажем, что так определенная длина обладает свойствами (I)—(III).

Свойство (III) очевидно.

Докажем (I): если $b=a$, то $l(b)=l(a)$. Пусть отрезок b равен a. Измеряя a, откладываем на нем отрезки, равные e_k (на k-м шаге измерения). Получаем

$$m_k e_k \leqslant a < (m_k+1)e_k.$$

Откладывая такие же отрезки на отрезке b, получим тот же результат, так как их суммы (равных отрезков e_k) будут равны и будут в том же отношении «больше — меньше» к отрезку b, равному a.

Итак, при каждом k также

$$m_k e_k \leqslant b < (m_k+1)e_k.$$

Таким образом, последовательности (1) будут для отрезков a и b одни и те же, а значит, совпадают и их пределы, т. е. $l(a)=l(b)$, что и требовалось доказать.

Докажем (II): $l(a+b)=l(a)+l(b)$. Пусть a, b — два данных отрезка. На k-м шаге измерения отрезков a, b и $a+b$ будем иметь неравенства вида

$$\begin{gathered} m_k e_k \leqslant a < (m_k+1)e_k, \quad p_k e_k \leqslant b < (p_k+1)e_k, \\ q_k e_k \leqslant (a+b) < (q_k+1)e_k. \end{gathered} \tag{3}$$

Из первых двух формул следует, что

$$(m_k+p_k)e_k \leqslant a+b < (m_k+p_k+2)e_k.$$

Здесь первое неравенство значит, что m_k+p_k отрезков e_k укладывается на $a+b$ и тем самым

$$m_k+p_k \leqslant q_k. \tag{4}$$

Второе неравенство означает, что m_k+p_k+2 отрезков e_k перекрывает $a+b$. Поэтому

$$m_k+p_k+2 \geqslant q_k+1. \tag{5}$$

Для длин $l(a)$, $l(b)$ выполняются неравенства, соответствующие (ввиду (2) и равенства $e_k=e/n_k$) неравенству

[1]) Конечно, не исключено, что при некотором k отрезок $e_{k+1} = (1/n_k)e$ уложится на a целое число раз, так что $a = m_k e_{k+1}$. Тогда будет $(m_k/n_k) = (m_{k+1}/n_{k+1}) = \ldots$

(3). Складывая эти неравенства для $l(a)$ и $l(b)$, получаем

$$\frac{m_k + p_k}{n_k} \leqslant l(a) + l(b) < \frac{m_k + p_k + 2}{n_k}.$$

Для $l(a+b)$ имеем

$$q_k/n_k \leqslant l(a+b) < (q_k+1)/n_k$$

или, ввиду (4) и (5),

$$(m_k + p_k)/n_k \leqslant l(a+b) < (m_k + p_k + 2)/n_k.$$

Это то же неравенство, что для $l(a)+l(b)$. И так как n_k может быть сколь угодно большим, то

$$l(a+b) = l(a) + l(b),$$

что и требовалось доказать.

Доказательству единственности предпошлем лемму.

Лемма 2. *Длина в каком угодно масштабе больше у большего отрезка, т. е. если $a > b$, то $l(a) > l(b)$.*

Доказательство. Если $a > b$, то $a = b + c$ и, стало быть, по свойству (II) $l(a) = l(b) + l(c)$. А так как $l(c) > 0$, то $l(a) > l(b)$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем единственность.

Теорема 1б. *Существует только одна положительная функция отрезков с условиями* (I)—(III).

Доказательство. Пусть имеем положительные функции $l(a)$, $l_1(a)$ с условиями (I)—(III) (например, одна получена одним процессом измерения, другая — другим). Покажем, что они совпадают.

Возьмем какой-либо отрезок a; измеряя его, как было сделано выше, получим

$$m_k e_k \leqslant a < (m_k + 1) e_k.$$

Поэтому в силу доказанной леммы такие же неравенства будут для длин:

$$l(m_k e_k) \leqslant l(a) < l((m_k+1) e_k). \tag{6}$$

Кроме того, из свойства (II)

$$l(m_k e_k) = m_k l(e_k) = (m_k/n_k) l(e) = m_k/n_k$$

и аналогично $l((m_k+1)e_k) = (m_k+1)/n_k$, так что

$$m_k/n_k \leqslant l(a) < (m_k+1)/n_k.$$

Поскольку функция l_1 удовлетворяет тем же условиям, то для нее получаются такие же неравенства. И так как это имеет место при любом k, то выходит, что $l_1(a) = l(a)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Отношения равенства, «больше — меньше», так же как суммы и разности для отрезков и их длин (в любом масштабе) полностью соответствуют друг другу, т. е. если $a = b$, то $l(a) = l(b)$; и обратно: если $l(a) = l(b)$, то $a = b$, и аналогично в других случаях.*

Доказательство. Если $a = b$, то $l(a) = l(b)$ по условию (I). Докажем обратное. Пусть $l(a) = l(b)$. Допустим однако, что $a \neq b$ и, скажем, $a > b$, т. е. $a = b + c$. Тогда $l(a) = l(b) + l(c) > l(b)$. Следовательно, необходимо $a = b$.

Если $a > b$, то $l(a) > l(b)$. Это только что доказано. Докажем обратное: если $l(a) > l(b)$, то $a > b$. Пусть $l(a) > l(b)$. Тогда не может быть $b > a$, так как было бы $l(b) > l(a)$. Так же не может быть $b = a$, так как тогда $l(b) = l(a)$. Стало быть, $a > b$.

Если $a = b + c$, то $l(a) = l(b) + l(c)$ по условию (II) для длины. Докажем обратное, если $l(a) = l(b) + l(c)$, то $a = b + c$. Действительно, по условию (II) $l(b) + l(c) = l(b + c)$. Стало быть, $l(a) = l(b + c)$ и, следовательно, из доказанного первого свойства $a = b + c$.

Для разности доказательство аналогично.

Теорема 3 (о замене масштаба). *Если l, l' — длины при масштабах e, e', то для всякого отрезка a*

$$l'(a) = l(a)\,l'(e) = l(a)/l(e').$$

Доказательство. При измерении, как описано в доказательстве теоремы 1а, на каждом шаге при масштабе e будет

$$(m_k/n_k)e \leqslant a < ((m_k + 1)/n_k)e,$$

а потому, ввиду свойств длины l',

$$(m_k/n_k)l'(e) \leqslant l'(a) < ((m_k + 1)/n_k)l'(e).$$

Но $\lim\limits_{k\to\infty} (m_k/n_k) = l(a)$. Поэтому

$$l'(a) = l(a)\,l'(e),$$

что и требовалось доказать. (По симметрии e и e' $l(a) = l'(a)\,l(e')$, так что $l'(a) = l(a)/l(e')$.)

Теорема 4. *При любом масштабе e для всякого положительного числа x существует отрезок с длиной, равной x.*

Доказательство. Пусть даны масштаб e и положительное x. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ — те натуральные числа, при которых определены отрезки $(1/n_k)e$. Возьмем приближения к x:

$$m_k/n_k \leqslant x < (m_k + 1)/n_k,$$

где с ростом номера k нижние числа не убывают, а верхние не возрастают. Построим отрезки, отложенные от одной точки вдоль друг друга:

$$OA_k = (m_k/n_k)e, \quad OB_k = ((m_k + 1)/n_k)e.$$

По аксиоме непрерывности есть точка A между всеми A_k и B_k, т. е. есть такой отрезок $a = OA$, что при всех k

$$(m_k/n_k)e \leqslant a < ((m_k + 1)/n_k)e.$$

Длина отрезка a равна пределу чисел m_k/n_k, т. е. $l(a) = x$. Теорема доказана.

§ 16. Прямая и луч

Наглядно луч — это фигура, получающаяся при неограниченном продолжении отрезка в одну сторону — за один конец (рис. 40, *а*); прямая же получается при неограниченном продолжении отрезка в обе стороны — за оба конца (рис. 40, *б*).

В § 12 было доказано, что всякий отрезок можно продолжить за каждый из его концов на любой отрезок, т. е.

Рис. 40

на отрезок, равный любому заданному, и так же можно продолжить отрезок за оба конца. «Неограниченно продолжить» — и, значит, продолжать на отрезки, бо́льшие любых заданных. Но можно определить прямую и луч, не говоря о продолжении.

Прямой AB называется фигура, являющаяся объединением всех отрезков, содержащих точки A и B (т. е. точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда она принадлежит какому-нибудь отрезку, содержащему точки A и B).

Лучом или полупрямой AB называется фигура, являющаяся объединением всех отрезков с концом A, содержащих точку B[1]). *Точка A называется началом луча.*

Хотя наглядно кажется очевидным, что прямая и луч — фигуры, непосредственно из определений не ясно, удовлетворяют ли они той аксиоме фигуры, которая требует, чтобы налагаемые условия были проверяемы для каждой данной точки. Однако определения прямой и луча можно переформулировать таким образом, что проверяемость условий становится очевидной. Это будет сделано в конце параграфа. Здесь же обратимся к выяснению основных свойств прямой и луча. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если у двух отрезков есть две общие точки, то они образуют один отрезок.*

Эта теорема была доказана в § 12 в частном случае, когда одна из общих точек двух отрезков — это их общий конец. Теперь докажем теорему в общем случае.

Доказательство. Пусть у отрезков AB, CD есть две общие точки M, N. Если M (или N) — общий конец отрезков AB, CD, то они образуют один отрезок (по доказанному в § 12). Допустим, точка M — не конец отрезка AB и, значит, точка M делит отрезок AB на два (по аксиоме деления отрезка); один из них содержит точку N (рис. 41). Так заключаем, что вообще наши отрезки

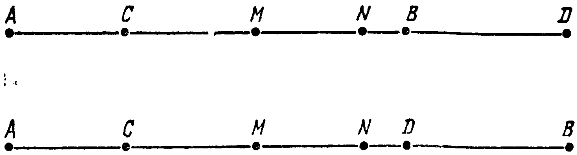

Рис. 41

AB, CD содержат части (отрезки) с концами M, содержащие N, и с концом N, содержащие M. По доказанному в § 12 отрезки с общим концом M и общей точкой N образуют один отрезок, так же как отрезки с концом N и общей точкой M тоже образуют один отрезок. Первый с

[1]) В § 11 луч был определен как объединение всех отрезков AM, содержащих AB. Но это те же отрезки, какие содержат B, так как если B на AM, то $AB \subset AM$ по аксиоме деления отрезка.

концом M содержит точку N, второй с концом N содержит M. Стало быть, по аксиоме соединения они образуют один отрезок. Теорема доказана.

Основные свойства прямой выражает следующая теорема, или вернее три теоремы, которые мы соединяем в ней.

Теорема 2. (1) *Для каждых двух точек существует содержащая их прямая, и притом только одна.*

(2) *Для всяких двух точек A, B, принадлежащих прямой, отрезок AB содержится в этой прямой.*

(3) *Всякая точка A, принадлежащая прямой, делит ее на два луча с общим началом A (т. е. прямая оказывается объединением двух лучей с началом A, не имеющих других общих точек).*

Доказательство. Утверждение (1) состоит из двух частей. Первое утверждает существование прямой, содержащей две данные точки. Это сразу следует из определения прямой: если даны точки A, B, то прямая образуется всеми содержащими их отрезками (то, что прямая AB не пустая — содержит точки — следует из аксиомы проведения отрезка).

Вторая часть утверждения (1) говорит, что прямая, содержащая две данные точки, только одна. Это значит, что если какая-либо прямая AB содержит точки M, N, то она является прямой MN (т. е. объединением отрезков, содержащих точки MN). Доказательство этого получается непосредственно с помощью доказанной выше теоремы 1 об отрезках с двумя общими точками.

Действительно, пусть прямая AB содержит точки M, N. По определению прямой AB это значит, что существует отрезок, содержащий вместе с точками A, B как

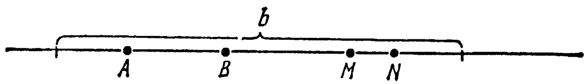

Рис. 42

точку M, так и точку N (рис. 42). Вместе с отрезком AB он образует, по доказанной теореме, один отрезок b. Если теперь взять любой отрезок a, содержащий точки A, B, то он, по той же теореме, вместе с полученным отрезком b образует один отрезок. Таким образом, всякий отрезок a, включающийся в прямую AB, содержится в отрезке, содержащем точки M, N. Но такой отрезок содержится в прямой MN (так как она есть объединение всех отрезков, содержащих точки M, N). Следовательно, всякий отрезок a, включающийся в прямую AB, включается и в прямую MN, т. е. $AB \subset MN$. Но меняя ролями пары точек A, B и M, N, точно так же убедимся, что прямая AB содержит прямую MN. Стало быть, прямые эти совпадают, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждений (2), (3) об отрезках и лучах мы оставляем читателю.

Аналогично теореме о прямой имеет место теорема о луче.

Теорема 3. (1) *При данных точках A и B существует луч с началом A, содержащий точку B, и притом только один.*

(2) *Если точки M, N принадлежат данному лучу, то он содержит и отрезок MN.*

(3) *Всякая точка C луча AB, отличная от его начала A, делит луч на отрезок AC и луч с началом C.*

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Утверждение (1), подобно сходному утверждению теоремы о прямой, состоит из двух частей: существование и единственность. Первое непосредственно содержится в определении луча. Второе сводится к тому, что если точка M принадлежит лучу AB и отлична от A, то лучи AM и AB совпадают. Доказательство аналогично доказательству в теореме о прямой, но проще, поскольку тут только одна точка M.

В предыдущих параграфах мы не пользовались понятием прямой; вообще, в элементарной геометрии без него можно обойтись; оно, как и понятие луча, бывает полезно для более короткого выражения некоторых утверждений. Например, мы говорим, что в точке на отрезке или на прямой можно восстановить только один перпендикуляр, но так можно сказать только о прямой (или о луче, если перпендикуляр проводится в одну сторону) потому что отрезок, перпендикулярный другому в данной точке, конечно, не один.

В заключение вернемся к определениям прямой и луча. Определения эти равносильны следующим, в которых условия, налагаемые на точки, очевидно проверяемы.

Точка M принадлежит прямой AB (т. е. объединению отрезков, содержащих точки A и B) тогда и только тогда, когда для нее выполнено одно из трех условий:

1) $$M \in AB,$$
2) $$B \in AM,$$
3) $$A \in BM,$$

где AB и т. д.— отрезки.

Точка M принадлежит лучу AB (т. е. объединению отрезков AN, содержащих B) тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

(1) $$M \in AB,$$
(2) $$B \in AM.$$

Докажем сказанное для луча. Обозначим $(AB)_1$ и $(AB)_2$ луч AB и фигуру, определяемую условиями (1), (2) на точку M. Условие (1) равносильно тому, что фигура $(AB)_2$ содержит отрезок AB. Луч $(AB)_1$ тоже его содержит, потому что он состоит из отрезков AM, содержащих точку B, а всякий такой отрезок содержит отрезок AB (как следует из аксиомы деления отрезка). Итак, отрезок AB у фигур $(AB)_1$, $(AB)_2$ общий, и остается доказать их совпадение вне отрезка AB. Если точка M из фигуры $(AB)_2$ удовлетворяет условию (2), т. е. B на AM, то отрезок AM входит в число отрезков, образующих луч $(AB)_1$. Стало быть, $(AB)_2 \subset (AB)_1$.

Пусть теперь точка N принадлежит лучу $(AB)_1$, но не отрезку AB. Она тем самым принадлежит какому-то отрезку AM, на котором лежит точка N. А так как точка N не принадлежит отрезку AB, то по аксиоме деления отрезка $N \in MB$. Тогда, как следует из теоремы 2 § 12, $B \in AN$, т. е. точка N удовлетворяет условию (2) для точек фигуры $(AB)_2$. Таким образом, $(AB)_1 \subset (AB)_2$. А ввиду доказанного обратного включения обе фигуры совпадают, что и требовалось доказать.

Доказательство для прямой аналогично и может быть осуществлено читателем в качестве упражнения.

§ 17. Координаты на прямой

Все проведенные выводы позволяют ввести на прямой координаты. Прежде всего фиксируем масштаб измерения длин — единичный отрезок.

Пусть дана прямая. Отмечаем на ней точку O; она делит прямую на две полупрямые (два луча). Одну из них обозначим как «положительную», другую — как «отрицательную». Каждой точке M на данной прямой сопоставляем число x по следующим правилам:

(1) точке O сопоставляем $x=0$;

(2) если точка M на положительной полупрямой, то полагаем x равным длине $|OM|$ отрезка OM в выбранном масштабе;

(3) если же точка M на отрицательной полупрямой, то полагаем $x=-|OM|$.

Таким образом, каждой точке прямой сопоставлено число — ее координата x.

Обратно, если дано число x, то ему соответствует определенная (единственная) точка M с такой координатой:

(1) если $x=0$, то точка с такой координатой — это O;

(2) если $x>0$, то берется на положительной полупрямой такая точка M, что $|OM|=x$ (это возможно поскольку каждому положительному числу соответствует при данном масштабе отрезок такой длины);

(3) если $x<0$, то берется точка M на отрицательной оси с $|OM|=-x$.

Таким образом, между точками прямой и вещественными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие. При этом порядок чисел соответствует порядку точек; если точка C лежит на отрезке AB, то ее координата c заключена между координатами a, b точек A, B. Можно, обозначив через A точку с меньшей координатой, считать $a<b$. Тогда сказанное означает, что $a<c<b$, или, что равносильно, c принадлежит числовому промежутку $]a, b[$: $c\in]a, b[$. В общем, устанавливается взаимно однозначное соответствие между отрезками и числовыми промежутками. При этом длина отрезка равна модулю разности координат его концов, т. е. концов соответствующего числового промежутка: $|AB|=|b-a|=b-a$, если, как условлено, $a<b$.

Все это непосредственно выводится из данного определения координат и свойств сложения отрезков и, соответственно, сложения их длин. Убедимся в этом.

Пусть у отрезка AB, как условлено, $a<b$. Возможны разные случаи.

1. Если $a>0$, то обе точки A, B лежат на положительной полуоси, так что $a=|OA|$; $b=|OB|$ (рис. 43) и так как $a<b$, т. е. $OA<OB$, то A — на отрезке OB. Поэтому

$$|OB|=|OA|+|AB|, \qquad |AB|=|OB|-|OA|,$$

т. е.

$$|AB| = b - a = |b - a|.$$

2. Если $a = 0$, то точка A совпадает с O и

$$|AB| = |OB| = b = b - a,$$

так как $a = 0$.

3. Пусть $a < 0$, $b > 0$, так что A на отрицательной полупрямой, B на положительной и, стало быть, O на

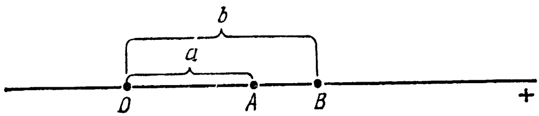

Рис. 43

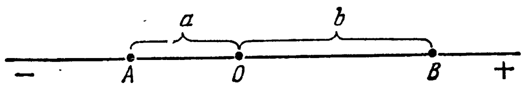

Рис. 44

AB (рис. 44). Кроме того, $a = -|OA|$, $b = |OB|$, поэтому

$$|AB| = |AO| + |OB| = b - a.$$

4. Если $a < 0$ и $b = 0$, то $a = -|OA|$ и $B = O$, так что

$$|AB| = |AO| = -a = b - a$$

(так как $b = 0$).

5. Пусть, наконец, $a < 0$, $b < 0$ так что обе точки A, B на отрицательной полупрямой и $a = -|OA|$, $b = -|OB|$.

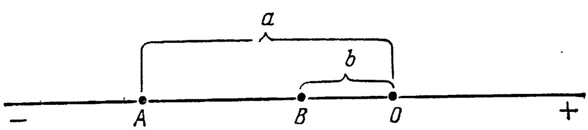

Рис. 45

Так как $a < b$, то B между A и O (рис. 45). Поэтому

$$|AB| = |AO| - |OB| = -a + b = b - a,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если C на AB, то $c \in]a, b[$.

Если C на AB, то $|AB| = |AC| + |BC|$, и так как $b > a$, то по доказанному это равносильно тому, что

$$b - a = |b - a| = |b - c| + |a - c|.$$

Это равенство выполнено, если $a \leqslant c \leqslant b$. Иначе оно не может выполняться. Например, если $c < a$, то $b - c > b - a$ и тем более $|b - c| + |a - c| > b - a$. Аналогично заключаем, что $c > b$ невозможно. Следовательно, $c \in]a, b[$ (так как $c \neq a$, $c \neq b$).

Убедимся в обратном: если $c \in]a, b[$, то C на AB. Действительно, если $c \in]a, b[$, то

$$b - a = |b - c| + |c - a|,$$

и если C на AB, то это выражает равенство $|AB| = |AC| + |CB|$. Но если C не на AB, то либо A на BC либо B на AC. В первом случае $AB < BC$, т. е. $b - a < |b - c|$ и тем более $b - a < |b - c| + |c - a|$. Аналогично не может быть B на AC. Таким образом, C на AB, что и требовалось доказать.

В проведенных выводах при всей их скрупулезности есть, однако, существенный пробел. Доказывая, что $|AB| = |b - a|$, мы воспользовались тем, что если точки A, B лежат на разных лучах с началом O, то отрезки OA, OB образуют отрезок AB. Но это надо еще доказать. Точно так же мы пользовались тем, что если точки A, B лежат на одном луче с началом O, то либо A на OB, либо B на OA. А почему не может быть так, что ни A на OB, ни B на OA? Это тоже надо доказать.

При доказательстве можно вместо прямой рассматривать отрезок PQ, на котором лежат точки O, A, B. Точка O делит его согласно аксиоме на два отрезка OP, OQ. Итак, сформулируем лемму.

Лемма. *Пусть O, A, B — три точки на отрезке PQ. Тогда, если точки A, B лежат на разных отрезках OP, OQ, то O лежит на AB, так что отрезок AB слагается из*

Рис. 46

OA и OB. Если же точки A и B лежат на одном из отрезков OP, OQ, то либо A на OB, либо B на OA.

Доказательство. Пусть A, B, O — три точки на отрезке PQ. Так что, в частности, O делит PQ на OP и OQ (по аксиоме деления отрезка). Допустим, что точки A, B принадлежат разным отрезкам OP, OQ и скажем, A на OP, B на OQ (рис. 46).

5*

Воспользуемся леммой 2 из § 12: если C на AB и D на CB, то C на AD.

Имеем: O на PQ и B на OQ. Поэтому согласно лемме O на PB. Теперь имеем O на PB и A на OP, так что по лемме O на AB, что и требовалось доказать.

Пусть теперь точки A, B лежат на одном из отрезков OP, OQ — скажем, на OP. Тем самым отрезок OP разделен на OA и AP. Если при этом B на OA (рис. 47, *а*)),

Рис. 47

это то, что требует вторая часть доказываемой леммы. Если же B на AP (рис. 47, *б*)), то по лемме 2 из § 12 A на OB. Итак, либо B на OA, либо A на OB, что и требовалось доказать.

Таким образом, лемма полностью доказана. Можно заметить, что она равносильна следующему утверждению: из трех точек отрезка всегда одна и только одна лежит на отрезке с концами в двух других точках. Другими словами, из трех точек отрезка (или прямой) одна и только одна лежит «между» двумя другими.

ГЛАВА 4

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 18. Углы, треугольники, построения

Начнем с того утверждения о двух отрезках с общим концом, которое было высказано еще в § 8 и на котором основано разделение углов на настоящие, развернутые и нулевые.

Теорема. *Для взаимного расположения двух отрезков с общим концом есть три и только три возможности:*

1) *каждый из отрезков лежит по одну сторону от другого (не считая, конечно, общего конца);*

2) *отрезки служат продолжением один другого, т. е. образуют вместе один отрезок и не имеют общих точек, кроме общего конца;*

3) *отрезки налегают один на другой.*

Доказательство. Пусть даны два отрезка AB и AC. Допустим, отрезок AC имеет общую точку D, отличную от A, с каким-то отрезком, содержащим AB. Тогда этот отрезок содержит отрезок AC вместе с AB (теорема 1 § 16).

Если при этом отрезок AC имеет с AB общую точку помимо A, то он налегает на AB. То есть имеет место третий случай расположения отрезков AB, AC.

Если же отрезки AB, AC не имеют общих точек кроме A, то поскольку они содержатся в одном отрезке, они вместе образуют отрезок BC. То есть имеет место второй случай расположения отрезков AB, AC.

Если поменять данные отрезки ролями, предположив, что отрезок AB имеет отличную от A общую точку с отрезком, содержащим AC, то придем к тому же выводу (поскольку в нем роль отрезков AB, AC уже одна и та же).

Поэтому остается только такая возможность, что отрезки AB, AC не имеют кроме A общих точек ни с каким отрезком, содержащим один из них. Но это значит, что отрезок AC (помимо точки A) лежит по одну сторону от отрезка AB, так же как отрезок AB лежит по одну сторону от отрезка AC. Т. е. имеет место первый случай, предусмотренный в теореме, и теорема доказана.

Следствие 1 (об углах). *Соответственно трем случаям взаимного расположения отрезков с общим концом имеются три вида углов*: 1) *настоящие*, 2) *развернутые*, 3) *нулевые. Угол рассматривается с точностью до «удлинения и укорочения» сторон и вид угла не зависит от того, какая пара представляющих его отрезков — сторон берется. При переходе от данных отрезков* AB, AC *к их содержащим или, напротив,— к содержащимся в них, вид угла, очевидно, не может измениться.*

Следствие 2 (о поперечине). *Поперечина угла — это отрезок с концами на его сторонах. Утверждается, что поперечина настоящего угла не имеет других общих точек с его сторонами.*

Доказательство. Пусть отрезки AB, AC образуют настоящий угол, и пусть MN — его поперечина, $M \in AB$, $N \in AC$. Отрезок MN лежит с той стороны от отрезка MA, где лежит точка N и тем самым (по доказанной теореме) не имеет с MA общих точек, кроме M. То же заключение верно для отрезка MB (если он есть, т. е. если M отлична от B). Таким образом, поперечина MN не имеет с AB общих точек кроме M. Аналогичное заключаем и для стороны AC.

Треугольники.

Треугольником мы называем здесь фигуру, состоящую из трех отрезков, имеющих попарно общие концы, не содержащиеся в одном отрезке. *Стороны, вершины, углы* треугольника определяются как обычно, так же как и равенство треугольников — по равенству сторон и соответственных углов. Из того, что вершины не лежат на одном отрезке, следует, что углы треугольника настоящие, и каждая его сторона служит поперечиной противолежащего угла.

Замечание. Мы определили треугольник как фигуру, состоящую из отрезков, значит — являющуюся их объединением: ее точки — это точки этих отрезков. Можно спросить: а не «потеряется» ли при объединении среди других точек хотя бы один конец отрезков — одна вершина треугольника, как «потеряется», например, вершина развернутого угла в объединении его сторон? Этого не может быть. Но почему? Мы слишком хорошо представляем себе треугольник, чтобы раздумывать над такими вопросами. Но с аксиоматической точки зрения и тут нужно доказательство. В § 9 мы определяли треугольник как совокупность трех отрезков с попарно общими концами, не лежащими на одном отрезке. Здесь концы — вершины треугольника — выделялись самим определением. Но теперь это не так, и нужно доказать, что они выделяются.

Вершины треугольника выделены тем, что они являются такими его точками, которые не лежат ни на каком отрезке, содержащимся в объединении сторон треугольника $T = AB \cup BC \cup CA$. Действительно, допустим, например, вопреки утверждению, что точка A лежит на отрезке MN, содержащимся в T. В одной из сторон он содержаться целиком не может, так как получалось бы, что точка A лежит на этой стороне. Стало быть, отрезок MN содержится по крайней мере в двух сторонах, скажем, в AB и BC (или AC). Но тогда, имея с ними общие точки, он был бы поперечиной угла B (или A) и точка A не могла бы быть его внутренней точкой (по доказанному выше свойству поперечины). Таким образом, отрезка MN, содержащегося в T и содержащего внутри точку A, быть не может, что и требовалось доказать.

Равенство треугольников. Выполняются три классические теоремы о равенстве треугольников (только мы

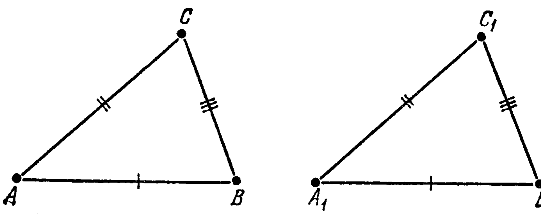

Рис. 48

устанавливаем их в ином порядке): (I) по трем сторонам, (II) по двум сторонам и углу между ними, (III) по стороне и прилежащим углам.

Доказательство (I). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны: $AB = A_1B_1$ и т. д. (рис. 48). Ввиду этих равенств отрезки BC, B_1C_1 являются соответственными поперечинами для углов A, A_1. По условию $BC = B_1C_1$. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Аналогично можно доказать, что $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

Доказательство (II). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1 \quad \text{и} \quad \angle A = \angle A_1$$

(рис. 49). Ввиду первых двух равенств у углов A, A_1 поперечины BC, B_1C_1 соответственные, и по равенству

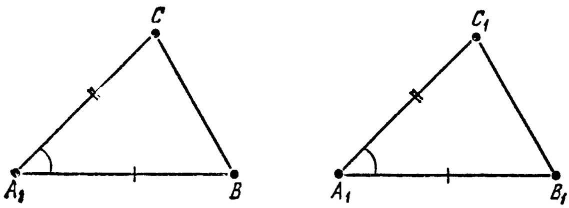

Рис. 49

углов они равны: $BC = B_1C_1$. Потому из (I) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство (III). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Отложим вдоль A_1C_1 отрезок A_1C_2 равный AC (рис. 50). Тогда ввиду (II) $\triangle A_1B_1C_2 = \triangle ABC$. Стало быть, его угол при B_1 равен углу B в треугольнике ABC. По аксиоме откладывания угла угол, равный B, может

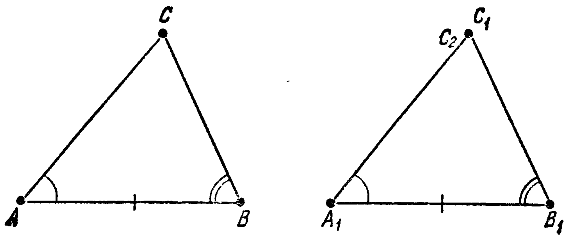

Рис. 50

быть здесь только один, так что угол B_1 тут один и тот же. Тем самым, $\triangle A_1B_1C_2$ совпадает с $\triangle A_1B_1C_1$ и, значит, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Построения. При аксиоматическом изложении геометрии под построением понимают конечную последовательность тех действий, которые возможны в силу принятых аксиом, как то проведение отрезка; откладывание отрезка, равного данному; откладывание угла, равного данному. При этом сами эти аксиомы в их отвлеченном смысле не выражают ничего, кроме идеального, мыслимого существования объектов, о которых в них говорится. Вместе с тем эти аксиомы выражают в абстрактной форме совершенно реальные построения, которыми пользовались еще египтяне. Поэтому абстрактным построениям соответствуют реальные построения — конечные последовательности основных построений, указанных в аксиомах. Для основных построений можно указать инструменты: линейка для проведения отрезков, линейка, по которой можно отмечать отрезки, равные данным, угольник с подвижными сторонами и поперечиной для откладывания углов (рис. 51).

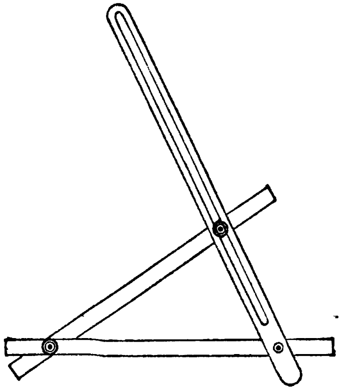

Рис. 51

Со времен греков принято рассматривать построения циркулем и линейкой. У Евклида были постулаты о возможности проводить отрезки и описывать окружности. В нашем изложении это тоже можно считать возможным, поскольку окружность — определенная фигура. Но прежде всего нужно ограничиться построениями, непосредственно основанными на аксиомах.

Указав построение, мы тем самым устанавливаем существование объекта, который строится. В § 14 было доказано существование середины отрезка. Но это было сделано посредством бесконечного процесса с использованием аксиомы непрерывности. Так что можно сказать: существование было доказано, но построение не дано. Остается задача: построить середину отрезка, пользуясь теми построениями, какие указаны в аксиомах.

Обратимся к построению перпендикуляра и докажем теорему.

Теорема. *Через каждую данную точку проходит перпендикуляр к любой данной прямой.*

Доказательство. Различаем два случая: 1) данная точка A не лежит на данной прямой a; 2) напротив, $A \in a$.

Случай 1). Возьмем на прямой a точку B и выберем луч a_1 с началом B (одну из двух частей, на которые точка B делит прямую a). Проведем отрезок AB, а с другой стороны от прямой проведем отрезок BC, равный AB и образующий с лучом a_1 такой же угол (по аксиомам откладывания угла и отрезка это возможно, рис. 52, *а*). Проведем отрезок AC. Он пересечет прямую a в некоторой точке D (так как точки A и C — с разных сторон от прямой a). Может случиться, что точка D совпадает с B, так что отрезки AB, BC образуют один отрезок AC. Тогда углы, образуемые ими с лучом a_1, смежные, а так как по построению они равны, то, значит, — прямые, т. е. $AC \perp a$.

Пусть точка D отлична от B, так что имеются два треугольника BDA и BDC. У них $BA = BC$, сторона BD общая (отрезок равен самому себе, так что «стороны» BD равны) и, кроме того, углы при вершине B равны — либо по построению, если точка лежит на луче a_1 (рис. 52, *а*), либо как смежные равным (рис. 52, *б*) согласно лемме 1 из § 21[1]). Следовательно, треугольники

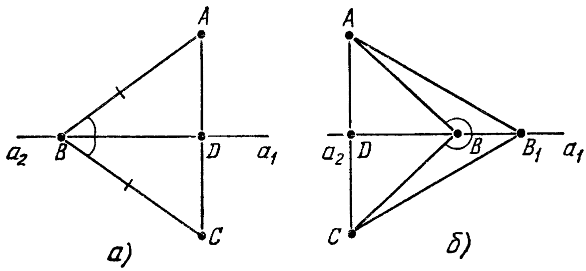

Рис. 52

равны, и значит, равны углы при вершине D, а так как они смежные, то — прямые. Таким образом, $AD \perp a$.

Случай 2). Точка A лежит на прямой a. В этом случае перпендикуляр можно построить так. Строим треугольник BCD с прямым углом D (например, так, как в

[1]) Можно не ссылаться на эту лемму, а взять точку B_1 так, чтобы B лежала на B_1D, и рассмотреть треугольники B_1BD, B_1BC. Они равны, так как углы при B равны, $AB = CB$ и B_1B общая. Поэтому углы при B_1 равны. Теперь заключаем, что $\triangle DAB_1 = \triangle DCB_1$ и, стало быть, их углы при D равны.

предыдущем построении). После этого откладываем при точке A от прямой a угол, равный углу D.

Это последнее построение как бы подобно тому, как строят прямой угол с помощью угольника с готовым прямым углом. Однако тут надо еще доказать, что угол, построенный при точке A, тоже будет равен своему смежному (ибо именно этим определен прямой угол).

Точно так же в случае 1) надо было еще доказать, что угол BDA равен своему смежному, со стороной AD.

В обоих случаях требуемое доказательство вытекает из теоремы, что все прямые углы равны; она будет доказана дальше (в § 20).

Единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, тоже может быть получена из выводов § 20.

Задача 1. Доказать теоремы о характерных признаках равнобедренного треугольника: треугольник равнобедренный тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: (1) углы при основании равны, (2) медиана есть высота, (3) медиана есть биссектриса, (4) биссектриса есть медиана, (5) биссектриса есть высота, (6), высота есть медиана, (7) высота есть биссектриса. Свойства (3) и (4) равносильны, так как идущая из данной вершины медиана как и биссектриса, только одна. (Такое же заключение относительно свойств (2), (6) и (5),

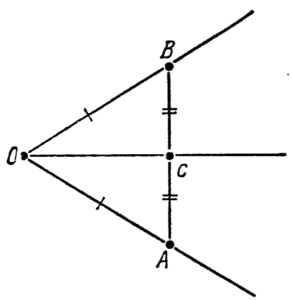

Рис. 53

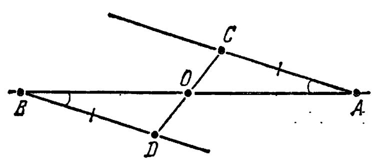

Рис. 54

(7) требует доказательства единственности высоты, т. е. отрезка, образующего с основанием прямые углы. Как осуществить такое доказательство?)

Задача 2. Доказать, что у всякого угла есть биссектриса.

Задача 3. Указать и обосновать построение биссектрисы данного угла (рис. 53).

Задача 4. Указать и обосновать построение середины отрезка (построение указано на рис. 54, но нужно доказать, что точка O лежит на отрезке AB; дело упрощается, если воспользоваться тем, что середина существует).

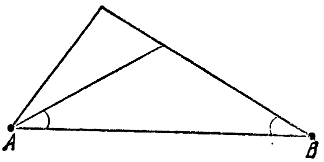

Рис. 55

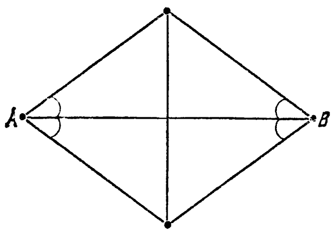

Рис. 56

Задача 5. На данном основании построить равнобедренный треугольник (рис. 55).

Задача 6. Получить из решения задачи 5 построение перпендикуляра в точке на прямой и — середины отрезка (рис. 56).

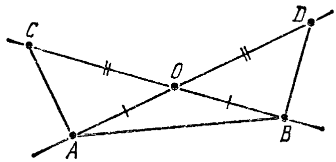

Рис. 57

Задача 7. Доказать, что вертикальные углы равны (доказательство можно видеть из рис. 57).

§ 19. О взаимном расположении отрезков

Мы говорим, что два отрезка *пересекаются*, если у них есть единственная общая точка, внутренняя на обоих (рис. 58). Аналогично понимается пересечение лучей или отрезка с лучом. Прямая пересекает отрезок или луч, если она содержит ровно одну его внутреннюю точку.

Будем также говорить, что *луч исходит* из точки A, если она служит его началом, также как *отрезок исходит* из точки A, если она является одним из его концов.

Замечание. В следующих далее теоремах говорится, наряду с отрезками, о прямых и лучах. Это делается только для краткости, чтобы не говорить о продолжении отрезков. Например, в одной теореме утверждается, что луч, исходящий из вершины угла и пересекающий какую-либо ее поперечину, пересекает и всякую другую. Это значит, что если отрезок, исходящий из вершины угла, пересекает какую-либо его поперечину, то он сам или его продолжение пересечет и любую другую заданную поперечину.

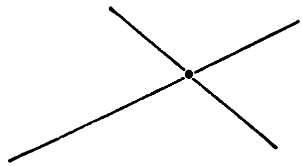

Рис. 58

Как эта теорема, так и другие, здесь доказываемые, выражают наглядно ясные факты. Но поэтому их доказательство на основе аксиом без ссылок на наглядность тем более поучительно.

Теорема 1. *Если прямая, не проходящая ни через одну вершину треугольника, пересекает одну его сторону, то она пересекает еще одну и только одну его сторону.*

Доказательство. Пусть прямая a пересекает сторону AB треугольника ABC (рис. 59). Тем самым точки

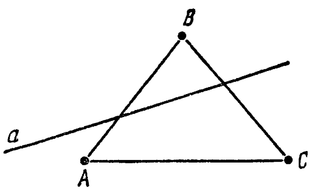

Рис. 59

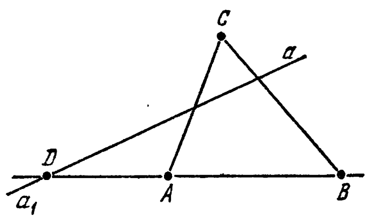

Рис. 60

A, B лежат с разных сторон от нее. По аксиоме о разделении плоскости точка C, не лежащая на прямой a, лежит от нее с одной стороны: либо со стороны A, либо — со стороны B; скажем, со стороны A. Тогда C и B лежат с разных сторон, BC пересекает прямую a, а AC — не пересекает, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть имеется треугольник ABC и луч a с началом на продолжении стороны AB, который пересекает AC. Тогда луч a пересекает также BC* (рис. 60).

Доказательство. По теореме 1 прямая $\bar{a}$, содержащая луч a, пересекает еще одну из сторон треугольника ABC. Пересекать сторону AB она не может, так как пересекает ее продолжение. Стало быть, она пересекает BC. Но нужно доказать, что BC пересекает именно луч a.

Прямая $\bar{a}$ состоит из луча a с началом в некоторой точке D на продолжении AB и дополнительного луча a_1 с тем же началом. Этот луч целиком расположен не с той стороны от прямой AB, где лежит точка C, и потому не может пересекать BC. Стало быть, сторону BC пересекает луч a, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если луч с началом в вершине данного (настоящего) угла пересекает какую-нибудь поперечину этого угла, то он пересекает каждую его поперечину.*

Доказательство. Пусть O — вершина угла и a — исходящий из нее луч, пересекающий поперечину AB (рис. 61). Пусть CD — другая поперечина, причем точка C лежит на той же стороне угла, где A. Тогда имеем треугольник ABC, и по предыдущей теореме луч a, пересекая AB, пересекает и BC. Теперь, рассматривая треугольник BCD, также убедимся, что луч пересекает CD, что и требовалось доказать. (Может, конечно, быть так, что точка C совпадает с A или D — с B, но тогда имеем только один треугольник, и доказательство получается в один шаг.)

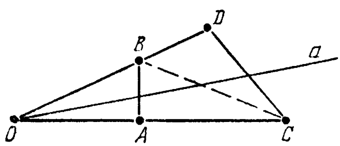

Рис. 61

Доказанная теорема дает основание определению:

Мы говорим, что отрезок или луч *проходит в данном* (настоящем) *угле* (или, что то же, *между его сторонами*), если он исходит из его вершины и пересекает какую-нибудь поперечину. По доказанной теореме — все равно какую.

Теорема 4. *Если из начала O луча a исходят два луча b, c по одну сторону от прямой, содержащей a, то либо b проходит между a и c, либо c — между a и b.*

Доказательство. Возьмем на луче a и на его продолжении (за точку O) какие-нибудь точки A, A_1, а также на луче b — точку B (рис. 62). Построим треугольник AA_1B. Луч c исходит из точки O, лежащей на стороне AA_1 и, стало быть, пересекает какую-нибудь другую сторону. Если сторону AB, то тем самым луч c проходит между a и b. Допустим, луч c пересекает сторону A_1B, и пусть C — точка пересечения (рис. 63). Проводя отрезок AC, получим треугольник AA_1C. Луч b, исходя из точки O на стороне AA_1 пересекает какую-то другую его сторону. Но A_1C он пересекать не может, так

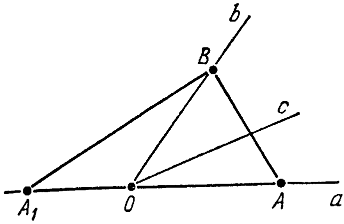

Рис. 62

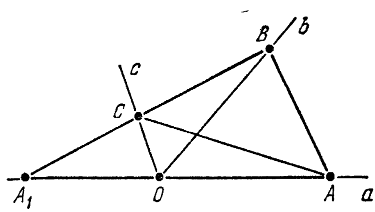

Рис. 63

как проходит через точку B. Следовательно, луч b пересекает AC и тем самым проходит между a и c. Теорема доказана.

Укажем в дополнение еще несколько результатов; их детальное доказательство может составить полезное упражнение.

Т е о р е м а 5. *Пусть из точки O на некотором отрезке a исходит отрезок b так, что образуются два смежных угла. Тогда каждый отрезок или луч c, исходящий из O по ту же сторону от a, что и b, и не налегающий на b, проходит в одном и только в одном из указанных смежных углов.*

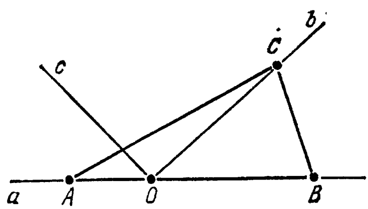

Рис. 64

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем на отрезке a две точки A и B по разные стороны от O и еще точку C на отрезке b. Построим треугольник ABC (рис. 64). Луч c, исходящий из O в ту же сторону от a, что b (но не вдоль b), пересекает одну из сторон AC, BC (почему?). Пусть это будет AC. Это значит, что луч c проходит в угле AOC, для которого AC служит поперечиной, т. е. в одном из смежных углов. Луч c исходит из точки O на прямой OC и потому лежит с одной стороны от этой прямой. Это та сторона, где лежит OA, а не OB. Стало быть, луч c не проходит в угле BOC. Итак, он проходит в одном и только в одном из смежных углов, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Если в (настоящем) угле со сторонами a, b проходят лучи c, d, то луч d проходит в одном и только одном из углов ac, bc* (рис. 65).

Доказательство. Проведем поперечину AB угла ab; луч c ее пересекает и тем самым делит AB на два отрезка AC, BC. Луч d пересекает один из них...

Читатель сам завершит доказательство.

Теоремы 3—6 можно обобщить, рассматривая лучи, исходящие из точки на стороне угла и не пересекающие

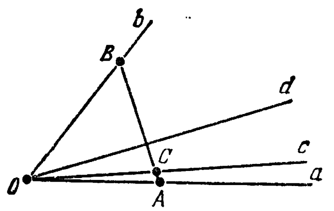

Рис. 65

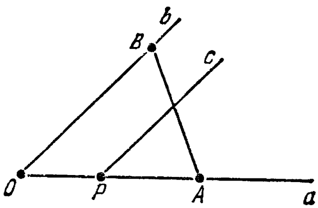

Рис. 66

другую его сторону. Например, пусть луч c, исходящий из точки P на стороне a угла ab с вершиной O, не пересекает b и пересекает какую-нибудь поперечину. Тогда он пересекает всякую поперечину AB, где точка A лежит на стороне a вне отрезка OP, а точка B — на стороне b — произвольная (рис. 66).

Рассмотрите аналогичные обобщения теорем 4—6.

Перескажите теоремы 1—6, не говоря о прямых и лучах, а только об отрезках.

§ 20. Алгебра углов

Для углов имеет место алгебра, аналогичная алгебре отрезков, основанная на сложении углов; разница лишь в том, что углы «ограничены» развернутым углом, тогда как отрезки не ограничены.

Мы говорим, что настоящий угол ab *составлен* из углов ac, bc, если отрезок c проходит в угле ab; в этом случае мы также говорим, что $\angle ab$ *слагается* из углов ac, bc или является их *суммой*.

Если угол ab развернутый, то каждый отрезок c с концом в его вершине (не налегающий на его стороны) условимся считать проходящим внутри угла ab, и угол ab считать составленным из углов ac и bc. Углы эти, как было определено, смежные.

Для сложения углов выполняется теорема, аналогичная аксиоме сложения отрезков.

Теорема 1 (о сложении углов). *Углы, составленные из равных углов, равны, т. е. если отрезки c, c_1 проходят внутри углов ab, a_1b_1 и при этом $\angle ac = \angle a_1c_1$, $\angle bc = \angle b_1c_1$, то также $\angle ab = \angle a_1b_1$* (рис. 67).

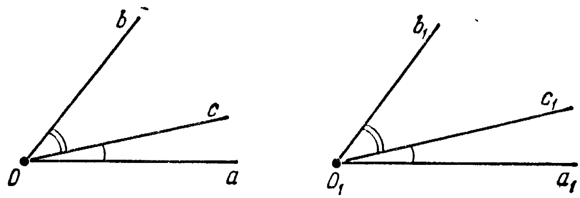

Рис. 67

Доказательству этой теоремы предпошлем два утверждения о смежных углах.

Лемма 1. *Углы, смежные с равными углами, равны.*

Доказательство. Пусть $\angle O = \angle O_1$, и пусть $\angle O'$, $\angle O'_1$, смежные с ними (рис. 68). Отложим на их сторонах равные отрезки OA, OB, OC и O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1. Тогда по равенству углов O, O_1 треугольники OAB, $O_1A_1B_1$

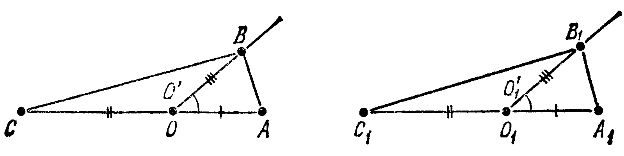

Рис. 68

равны так, что $\angle A = \angle A_1$ и $AB = A_1B_1$. Таким образом, у треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ равны по две стороны и по углу между ними. Поэтому $BC = B_1C_1$. Таким образом, у треугольников OBC, $O_1B_1C_1$ соответствующие стороны равны, а значит, $\angle O' = \angle O'_1$, что и требовалось доказать[1]).

[1]) Заметим, что из доказанного следует равенство вертикальных углов.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть углы ab, a_1b_1 равны, угол bc — смежный с ab, и к углу a_1b_1 «пристроен» угол b_1c_1, равный bc. Тогда этот угол оказывается смежным с углом ab* (рис. 69) («пристроен» — значит, сторона b_1 и вершина у них общие, а a_1 и c_1 лежат по разные стороны от нее).

Доказательство. Пусть выполнены высказанные условия. Продолжив сторону a_1 угла a_1b_1 за вершину,

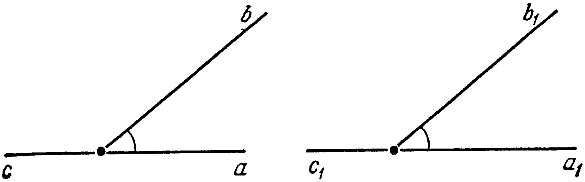

Рис. 69

получаем угол b_1c_2, смежный с a_1b_1. И так как $\angle a_1b_1 = \angle ab$, то по лемме $\angle b_1c_2 = \angle bc$. Но по аксиоме откладывания угла от отрезка b_1 с данного его конца можно отложить по одну сторону от b_1 только один угол, равный данному $\angle bc$. Следовательно, угол b_1c_2 совпадает с b_1c_1, т. е. он смежный с a_1b_1, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы о сложении углов. Проведем доказательство для случая, когда «сумма» — настоящий угол. Пусть даны углы ab, a_1b_1 с вершинами O, O_1, причем угол ab — настоящий. Пусть отрезки c, c_1 проходят внутри углов ab и a_1b_1, причем

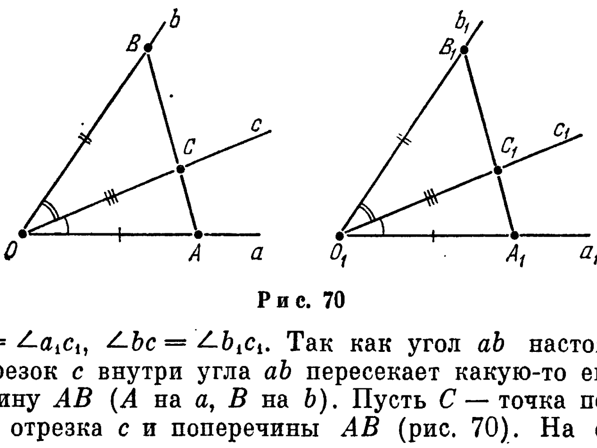

Рис. 70

$\angle ac = \angle a_1c_1$, $\angle bc = \angle b_1c_1$. Так как угол ab настоящий, то отрезок c внутри угла ab пересекает какую-то его поперечину AB (A на a, B на b). Пусть C — точка пересечения отрезка c и поперечины AB (рис. 70). На отрезках a_1, b_1, c_1 возьмем точки A_1, B_1, C_1 так, что $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $O_1C_1 = OC$ (если отрезки a_1, b_1, c_1 «не дотягивают» до этого, то их можно продолжить). Тогда по равенству углов при O и O_1 будет

$$\triangle OAC = \triangle O_1A_1C_1, \qquad \triangle OBC = \triangle O_1B_1C_1. \qquad (1)$$

Тем самым углы при C и C_1 в этих треугольниках равны.

Но углы при C смежные. Поэтому углы при C_1, тоже смежные, как следует из леммы 2. Стало быть, отрезки A_1C_1, B_1C_1 образуют один отрезок A_1B_1. И так как ввиду (1) $A_1C_1 = AC$; $B_1C_1 = BC$, то по аксиоме сложения также $A_1B_1 = AB$. Таким образом, у треугольников $OAB, O_1A_1B_1$ все стороны равны, а значит, $\angle O = \angle O_1$, т. е. $\angle ab = \angle a_1b_1$, что и требовалось доказать.

Теорема сложения углов доказана, когда хотя бы один составной угол — настоящий. Тогда выходит, что и другой настоящий. Случай, когда оба угла развернутые, решается следующей теоремой.

Теорема 2. *Все развернутые углы равны.*

Доказательство. На сторонах двух развернутых углов O, O_1 возьмем точки A, B и A_1, B_1 так, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Тогда по аксиоме о сложении отрезков $AB = A_1B_1$, т. е. поперечины равны и, стало быть, $\angle O = \angle O_1$, что и требовалось доказать (рис. 71).

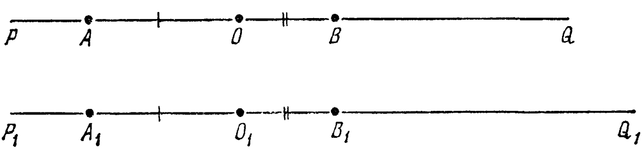

Рис. 71

Пока что это доказательство неполно: мы воспользовались в нем тем, что отрезки OA, OB, так же как O_1A_1, O_1B_1 образуют отрезки AB и A_1B_1. Однако это непосредственно следует из леммы, доказанной в § 17 гл. 3. Именно, стороны развернутого угла ab образуют один отрезок PQ, которому принадлежат три точки A, B, O, причем точки A и B, принадлежат разным отрезкам OP, OQ — сторонам угла. Поэтому согласно указанной лемме точка O лежит на отрезке AB, как то и утверждается.

Теперь мы обобщим понятие о сложении углов буквально так же, как мы обобщили в начале § 13 понятие о сложении отрезков.

Определение. Мы говорим, что *угол* α *представляет сумму углов* β *и* γ, *и пишем* $\alpha = \beta + \gamma$, если угол α составлен из углов, равных β и γ, или, вообще равен углу, составленному из таких углов.

Операция сложения данных углов β и γ может представляться так. Строим угол ac, равный β, и пристраиваем к нему угол bc, равный γ, т. е. строим угол, равный γ, со стороной c — той же, что у угла ac, но с другой стороны от нее (рис. 72). При этом может оказаться, что сторона c уже не будет проходить между a и b: суммарный угол получится больше развернутого.

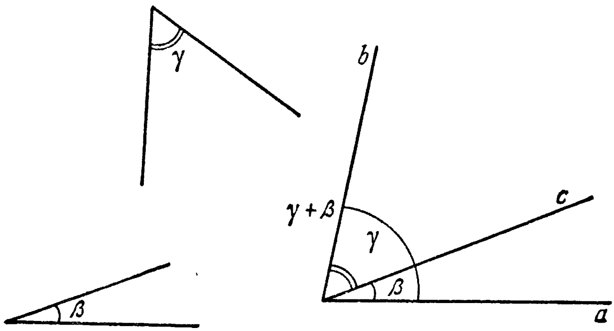

Рис. 72

Можно, конечно, *определить* и рассматривать и такие углы, но пока мы этого делать не будем, ограничиваясь сложением углов, когда «сумма оказывается, самое большее, развернутым углом».

Так же как для отрезков, определяем при натуральном n угол $n\alpha$ и угол $(1/n)\alpha$ (помня, что угол $n\alpha$ должен быть «не больше развернутого»).

Далее, так же как для отрезков, определяем *вычитание углов:* называем *их разностью* $\gamma = \alpha - \beta$, такой угол, что $\alpha = \beta + \gamma$, если есть такой угол γ. Точно так же определяем: $\alpha > \beta$, если есть такой угол γ, что $\alpha = \beta + \gamma$ (рис. 73).

Как и для отрезков, доказывается

Лемма 3. *Если* $\alpha > \beta$ *и* $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, *то* $\alpha_1 > \beta_1$ *и* $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta$.

Другими словами, если отрезок c идет внутри угла ab и $\angle a_1b_1 = \angle ab$, $\angle a_1c_1 = \angle ac$, причем угол a_1c_1 отложен по ту же сторону от a_1, что $\angle a_1b_1$, то также c_1 внутри $\angle a_1b_1$ и $\angle b_1c_1 = \angle bc$ (рис. 73).

Эта формулировка отличается от соответствующей формулировки леммы для отрезков тем, что вместо концов A, B и т. п. отрезков появляются стороны углов a, b и т. п. (большие буквы заменяются на строчные) и вместо откладывания отрезка вдоль данного отрезка появляется откладывание угла с той же стороны, где данный угол.

Соответственно и доказательство получается такой заменой в доказательстве для отрезков, а вместо ссылки на

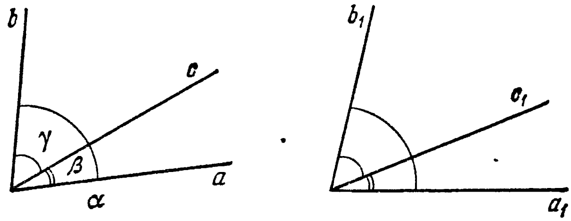

Рис. 73

аксиому сложения отрезков приходится сослаться на доказанную теорему о сложении углов.

Читателю полезно самому провести получающееся доказательство.

В итоге получаем «теорему об алгебре углов».

Теорема. *Для углов наряду с основным понятием равенства определены операции сложения и вычитания и отношение «больше — меньше». При этом оказывается, что эти операции и отношение обладают такими же свойствами как для положительных чисел, не превосходящих какого либо данного числа* (соответственно тому, что углы не больше развернутого). Именно, прежде всего выполняется следующее.

1. *Для любых двух углов* α, β *таких, что* $\alpha < \beta'$, *где* β' — *угол, смежный с* β, *определена их сумма.*

2. *Выполняются переместительный и сочетательный законы сложения.*

Выполняются также пять свойств, какие для отрезков сформулированы в конце § 13.

Доказательства всех этих свойств получаются точно так же. Проследить все эти выводы мы представляем читателю в качестве очень полезного упражнения, когда доказательство не просто повторяется, а с некоторыми небольшими изменениями в других условиях.

В частности, при натуральном n, если $\alpha = \beta$, то $(1/n)\alpha = (1/n)\beta$. Это включает, что половины равных углов равны (и так как угол равен самому себе, то его половины равны, соответственно, биссектриса угла только одна). Применяя это к прямому углу, т. е. к половине развернутого угла, получаем:

(1) *все прямые углы равны,*

(2) *через данную точку на отрезке проходит только один перпендикуляр* (один с точностью до удлинения и укорочения).

§ 21. Параллельные отрезки и прямые

В связи с аксиомой «о параллельных отрезках» мы назвали параллельными равные отрезки AC, BD, проведенные в одну сторону из концов какого-либо данного отрезка AB, перпендикулярно к нему. Аксиома утверждает, что в таком случае $CD = AB$ (рис. 74).

Лемма 1. *Параллельные отрезки перпендикулярны также отрезку CD.*

Доказательство. Проведя отрезок AD, получим два треугольника ABD и ACD (рис. 74). У них $AC = BD$

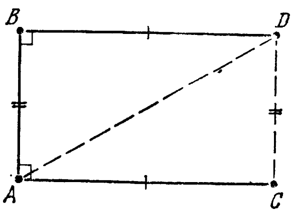

Рис. 74

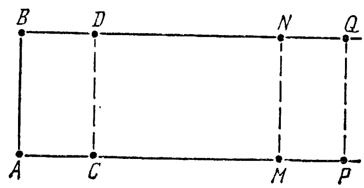

Рис. 75

по условию, $AB = CD$ по аксиоме, сторона AD общая. Поэтому углы этих треугольников равны, в частности, $\angle B = \angle C$. Но угол B по условию прямой. Следовательно, и угол C прямой, так что $AC \perp CD$. Для BD вывод тот же.

Таким образом, здесь все отрезки играют попарно одинаковую роль: противоположные равны и в общих концах взаимно перпендикулярны; короче, они образуют прямоугольник [1]).

[1]) Ввиду леммы 1 аксиома о параллельных отрезках говорит нам о существовании прямоугольников.

Отрезки AC, BD могут быть произвольной длины, поэтому для любых точек M, N на них или на продолжениях, равноудаленных от A и B, будут также $MN = AB$, $MN \perp AM$ и $MN \perp BN$ (рис. 75). То же будет, если продолжить отрезки за точки A, B на другую сторону от AB.

Представляя себе прямые, проведенные через точки A и C, B и D или, что то же,— через точки A и B, перпендикулярно AB, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Через каждую точку любой из двух прямых, перпендикулярных одному отрезку AB в его концах, проходит их общий перпендикуляр, т. е. отрезок, перпендикулярный им обоим. Все такие отрезки равны друг другу.*

Мы выражаем это, говоря: эти прямые проходят (или расположены) на постоянном расстоянии друг от друга [1]). *Прямые, которые не имеют общих точек, называют параллельными.* Прямые, проходящие на постоянном расстоянии друг от друга, очевидно параллельны. Верно так же и обратное: это вытекает из следующей «основной теоремы о параллельных».

Теорема 2. *Через любую точку, не лежащую на данной прямой a, проходит прямая на постоянном расстоянии от этой прямой — параллельная ей, а всякая другая*

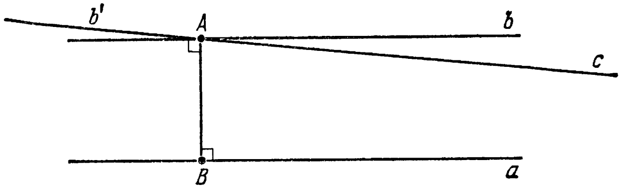

Рис. 76

прямая, проходящая через ту же точку, пересекает прямую a.

Доказательство. Пусть a — данная прямая, A — точка вне нее и AB — перпендикуляр к прямой a (по теореме из § 18 он существует). Проведем через точку A прямую $b \perp AB$ (рис. 76). По предыдущей теореме обе прямые a, b проходят на постоянном расстоянии друг

[1]) Это выражение связано с тем, что расстоянием от точки до прямой считается длина перпендикуляра, опущенного на прямую из этой точки. Но мы можем понимать сказанное просто как название.

от друга. Пусть теперь b' — другая прямая, проходящая через точку A. Она пересекает в этой точке прямую b и, стало быть, один из ее лучей с началом A лежит с той стороны от b, где прямая a (рис. 76). Возьмем на этом луче c какую-нибудь точку C и, опустив из нее перпендикуляры на прямые b и AB, получим прямоугольник с диагональю AC на луче c. Пристраивая к этому прямоугольнику равные прямоугольники (т. е. с такими же сторонами), к ним — такие же и т. д., получим «паркет» из равных прямоугольников (рис. 77).

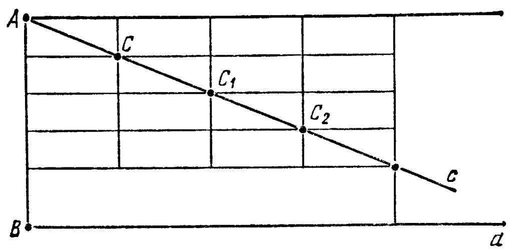

Рис. 77

У прямоугольника, прилегающего к первому только в вершине C, диагональ CC_1 лежит на луче c (это легко получается из равенства треугольников, на которые прямоугольники разделены диагоналями, сходящимися в вершине C (рис. 77)). Переходя к следующему прямоугольнику с диагональю C_1C_2, точно так же убедимся, что и она лежит на луче c.

Переходя так к следующим прямоугольникам, мы каждый раз смещаемся на их высоту. Поэтому (в силу аксиомы Архимеда!) рано или поздно луч c пересечет прямую a. Тем самым, прямая b' пересекает a, что и требовалось доказать.

Доказанную теорему можно перефразировать: *через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ей параллельная, и притом только одна — это прямая, проходящая от данной на постоянном расстоянии.* По гречески «параллельная» и значит: «идущая рядом». В доказанной теореме заключается, в частности, то, что обычно принимают за аксиому параллельных.

А к с и о м а п а р а л л е л ь н ы х п р я м ы х. *Для данной прямой и не лежащей на ней точки существует не более одной прямой, проходящей через эту точку и параллель-*

ной данной прямой (иначе говоря, не более одной прямой, не имеющей с данной общих точек и лежащих с ней в одной плоскости).

Наша аксиома параллельных отрезков равносильна этой аксиоме параллельных прямых (т. е. одна может заменить другую).

Действительно, доказанная только что теорема показывает, что *аксиома параллельных прямых следует из аксиомы параллельных отрезков* (понятно, при выполнении других аксиом). Верно также обратное: *аксиома параллельных отрезков следует из аксиомы параллельных прямых.*

Примем, что выполняется аксиома параллельных прямых. Докажем, что тогда выполняется аксиома параллельных отрезков.

Пусть отрезки AC и BD равны, перпендикулярны отрезку AB и расположены с одной стороны от него. Нам надо доказать, что $AB = CD$, как это требует аксиома параллельных отрезков. Прямые AC и BD параллельны, так как перпендикулярны одной прямой AB. Проведем через точку C прямую, параллельную AB (рис. 78). Она пересечет прямую BD в некоторой точке E (иначе через C проходила бы, кроме AC, вторая прямая, параллельная BD). Теперь, так как $CE \parallel AB$ и $AC \parallel BE$, то получаем параллелограмм $ABEC$. (Он является прямоугольником, так как углы A, B прямые.) У параллелограмма противоположные стороны равны[1]). Поэтому $BE = AC$. А так как 1) $BD = AC$, 2) отрезки BD, AC, лежат с одной стороны от прямой AB, так же, как стороны параллелограмма BE и AC, 3) отрезки BD, BE лежат на одной прямой, то точка E совпадает с точкой D. И, кроме того, $CE = AB$, т. е. $CD = AB$, что и требовалось доказать.

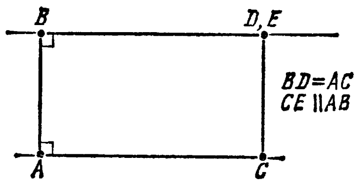

Рис. 78

Итак, обе аксиомы параллельности равносильны, и мы можем дальше пользоваться любой из них, как представляется более удобным.

Однако в наших рассуждениях есть пробел: мы воспользовались тем, что у параллелограмма противополож-

[1]) Ниже мы проследим, как это выводится из наших аксиом.

ные стороны равны. Этот привычный факт надо доказать на основе принятых здесь аксиом (с заменой аксиомы параллельных отрезков на аксиому параллельных прямых). Такое доказательство состоит из тех же шагов, что и принятое в обычных школьных курсах, однако полезно проследить эти шаги с точными ссылками на аксиомы.

1. *Прямые, образующие с секущей внутренние односторонние углы, в сумме равные* $2d$ (*или, что равносильно,— равные накрест лежащие углы*), *параллельны.* Пусть отрезок AB с концами на прямых a, b образует с ними с одной стороны углы α, β, $\alpha + \beta = 2d$. Допустим, что прямые пересекаются в точке C, так что имеем треугольник ABC. Построим треугольник ABC_1 с другой стороны от AB с углами $A = \beta$, $B = \alpha$. Тогда стороны AC_1, BC_1 окажутся продолжениями сторон треугольника ABC (рис. 79). Получается, что прямые a, b, пересекаются в двух точках C, C_1, что невозможно. (Отметьте здесь

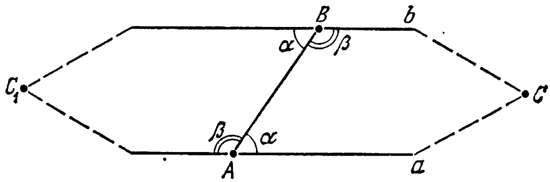

Рис. 79

все необходимые ссылки на ранее полученные выводы.) Дайте сами определение, какие углы накрест лежащие, какие односторонние.

2. Утверждение, обратное 1: *если прямые параллельны, то они образуют с секущей равные накрест лежащие углы.* (Доказывается из 1 на основании аксиомы параллельных. Именно здесь она и используется.)

3. *Противоположные стороны параллелограмма лежат по разные стороны от его диагонали.* Пусть $ABCD$ — параллелограмм, так что в частности $AD \| BC$. Эти стороны лежат по одну сторону от AB, так как $CD \| AB$ и, значит, отрезок CD не пересекает прямую AB. С той же стороны диагональ AC образует с лучами прямой AB смежные углы (рис. 80). Луч AD проходит в одном из этих углов. В угле BAC он проходить не может, так как тогда бы он пересекал его поперечину BC вопреки тому, что $AD \| BC$. Следовательно, AD проходит в другом угле и тем

самым с той же стороны, от диагонали AC, где лежит продолжение отрезка AB за точку A, т. е. не там, где лежит точка B, а вместе с нею и сторона BC. Утверждение доказано.

Это поучительный пример того, как сложно доказываются как раз самые наглядно очевидные факты, касающиеся взаимного расположения фигур.

4. *Противоположные стороны параллелограмма равны.* Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Стороны AD, BC лежат

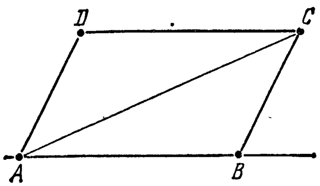

Рис. 80

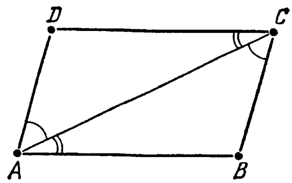

Рис. 81

по разные стороны от диагонали AC. Поэтому углы, которые они образуют с нею, накрест лежащие (рис. 81). Поэтому они равны. Аналогично заключаем о равенстве углов со сторонами AB, CD. Поэтому $\triangle ABC = \triangle ADC$ по общей стороне AC и двум прилежащим углам. Следовательно, $AB = CD$, $AD = BC$, что и требовалось доказать.

Выводы из аксиомы параллельных отрезков.

Параллельные прямые, как вообще бесконечные прямые, элементарной геометрии фактически не нужны: после первого применения аксиомы параллельных прямых всюду, где говорится о параллельных прямых, используют, на самом деле, отрезки. Когда же принята аксиома параллельных отрезков, то в прямых, можно сказать, вовсе нет необходимости (разве что для сокращения некоторых формулировок). Покажем, как из аксиомы параллельных отрезков получаются те основные выводы, какие обычно извлекают из аксиомы параллельных прямых. Важнейший вывод — это теорема о сумме углов треугольника; докажем ее (как было когда-то принято, обозначим прямой угол буквой d).

Лемма 2. *Сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым углам,* $2d$.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC именно $\angle A = d$. Проведем отрезок BD как в аксиоме параллельных отрезков, так что $\angle B = d$ и $BD = AC$

(рис. 82). Тогда по аксиоме $CD = AB$, так что $\triangle DBC = \triangle ACB$ и $\angle ACB = \angle DBC$. Поэтому сумма углов в $\triangle ABC$ будет

$$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = \angle A + \angle ABC + \angle DBC = 2d,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *У каждого треугольника по крайней мере два угла острые.* (Угол называется *острым*, если он меньше прямого.)

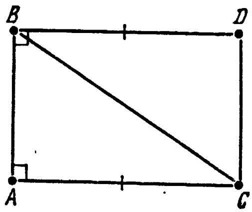

Рис. 82

Доказательство. Для прямоугольного треугольника это следует из леммы 2. Пусть у треугольника ABC угол A тупой. Опустим из C перпендикуляр CD на прямую AB (рис. 83, *а*). Получим прямоугольный треугольник CBD (D не может лежать на луче AB, так как получался бы прямоугольный треугольник ACD, у которого угол A тупой (рис. 83, *б*)). В треугольнике DBC углы C, B острые, стало быть, и в треугольнике ABC углы C, B острые, что и требовалось доказать.

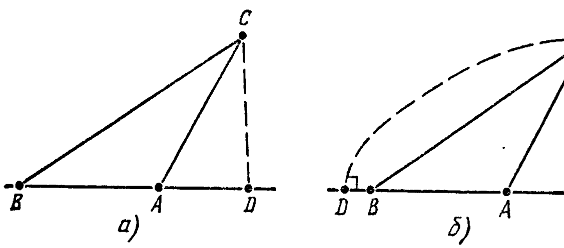

Рис. 83. *б*) Это невозможно!

Лемма 4. *Если в треугольнике ABC углы B, C острые, то основание D высоты AD лежит на BC* (рис. 84, *а*).

Доказательство. Если бы точка D лежала вне BC, то получили бы прямоугольный треугольник, с тупым углом (рис. 84, *б*), а это невозможно по лемме 2.

Теорема 3. *Сумма углов треугольника равна двум прямым, $2d$.*

Доказательство. Пусть для определенности именно углы B, C в данном треугольнике ABC острые. Опустим высоту AD на сторону BC. Получим два прямоугольных треугольника. Сумма их углов $4d$. Сумма углов данного треугольника получается из нее вычитанием двух прямых углов при точке D. Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь важное свойство параллельных.

Теорема 4. *Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внутренние накрест лежащие углы при какой-либо секущей равны.*

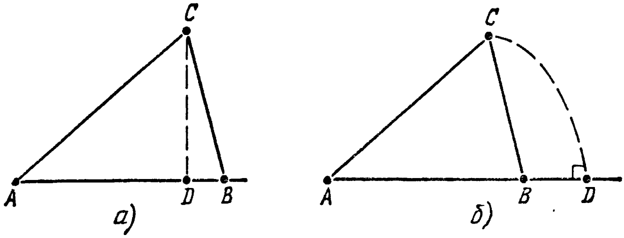

Рис. 84. *б*) Это невозможно!

Это, как следует из предыдущих результатов, равносильно следующему.

Теорема 5. *Пусть a, b — два отрезка и AB — отрезок с концами A на a, B на b. Отрезки a, b (или их продолжения) имеют общий перпендикуляр тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы A, B равны* (рис. 85).

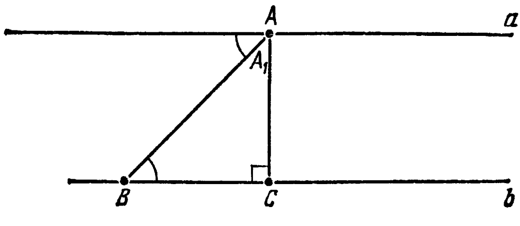

Рис. 85

Доказательство. Опустим на b перпендикуляр AC, получим $\triangle ABC$ с $\angle C = d$. Поэтому (обозначая $\angle A_1 = \angle BAC$)

$$\angle A_1 + \angle B = d. \qquad (2)$$

Если у a, b есть общий перпендикуляр, то $AC \perp a$, т. е. $\angle A + \angle A_1 = d$. Поэтому из (2) $\angle A = \angle B$.

Если же дано, что $\angle A = \angle B$, то из (2) $\angle A_1 + \angle A = d$, т. е. $AC \perp a$. Теорема доказана. (Правда, мы не оговорили, что возможно $AB \perp b$, и тогда нет треугольника

ABC. Но тогда $\angle B = d$ и вывод очевиден, так как $\angle A = \angle B$ равносильно $\angle A = d$. Кроме того, мы использовали, что если у a и b есть какой-то один перпендикуляр, то по предыдущим выводам, он есть всюду, в частности, из точки A.)

Замечание. Аксиома параллельных прямых равносильна любой из следующих (что предлагается доказать читателю).

1. В условиях аксиомы параллельных отрезков ($\angle A = \angle B = d$, $AC = BD$) также $\angle C = d$.
2. Если в четырехугольнике три угла прямые, то и четвертый тоже прямой.
3. К любым двум отрезкам, образующим прямой угол, можно «пристроить» прямоугольник.
4. При любом отрезке AB можно построить треугольник ABC с данными $\angle B$, $\angle C$, если $\angle B + \angle C < 2d$.
5. Если отрезки AC, BD расположены с одной стороны от AB и $\angle B + \angle C < 2d$, то они при продолжении за точки C, D пересекаются (это V постулат Евклида; он, очевидно, равносилен 4).

§ 22. О плоских фигурах. Полуплоскость

В геометрии, как и в практике, слово «треугольник» понимают в двух смыслах: в одном оно обозначает фигуру из трех отрезков, в другом — часть плоскости, ограниченную тремя отрезками. Если говорят: «сделайте треугольник из проволоки», то имеют в виду треугольник в первом смысле, если же предлагают: «вырежьте треугольник из бумаги», то понимают треугольник во втором смысле.

Если треугольник — это фигура из трех отрезков; (как он определен в § 18), то, говоря о площади треугольника, имеют в виду ограниченную им часть плоскости. Точность требует определить, что значит «ограничивает». Дадим определение, определив сначала ломаную.

Ломаной называется совокупность отрезков с последовательной общими концами: AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 86). Отрезки эти называются *звеньями ломаной*. Это определение не исключает, что соседние звенья и даже все они образуют один отрезок. Точки A_1, A_n называются *концами ломаной*, и говорят, что она их соединяет. (Заметим, что в таком определении ломаная — это не фигура, а совокупность звеньев с их данным порядком;

в простейшем случае они могут образовывать один отрезок, разделенный на «звенья» каким-либо способом). Считаем, что точка принадлежит ломаной, если она принадлежит хотя бы одному ее звену.

Мы говорим, что *фигура F, состоящая из конечного числа отрезков и лучей, ограничивает фигуру G, если каковы бы ни были точки A, B, не принадлежащие F, причем A — принадлежит G, а B — не принадлежит G, то каждая ломаная с концами A, B пересекает F*, т. е.

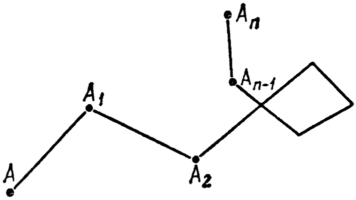

Рис. 86

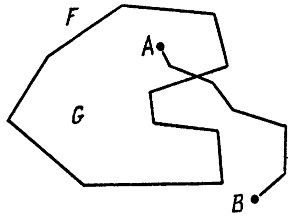

Рис. 87

имеет с F хотя бы одну общую точку (рис. 87). Так как прямая состоит из двух лучей, то речь может идти и о фигуре, ограниченной прямыми.

Наглядно данное определение означает, что фигура F ограничивает G, если из G нельзя выйти, не пересекая F.

В определении точки A и B играют одинаковую роль, потому из определения следует, что если фигура F ограничивает G, то она также ограничивает фигуру, содержащую все точки, не принадлежащие ни G, ни F.

Обращаем внимание, что фигура F, ограничивающая фигуру G, может быть обширнее, чем «граница» фигуры G (понимаемая пока в наглядном смысле). Кроме того, может случиться, что точек, не принадлежащих ни F, ни G, нет вовсе. (Например, F — отрезок, а G — все остальные точки плоскости.)

Если фигура F ограничивает фигуру G и, кроме того, существуют точки, не принадлежащие ни F, ни G, то говорят, что фигура F *разбивает* плоскость (на фигуру G и фигуру, образованную точками, не принадлежащими ни F, ни G).

Вообще, фигура F разбивает какую-либо фигуру H, если в H существуют точки, не принадлежащие F, которые нельзя соединить в пределах H ломаной, не пересекающей F.

Указанные понятия появляются прежде всего в связи с аксиомой деления плоскости; она равносильна следующему утверждению.

Каждая прямая разбивает плоскость на две такие фигуры, в каждой из которых любые две точки соединяются отрезком, содержащимся в самой фигуре.

Фигуры с таким свойством, как известно, называются выпуклыми, т. е. фигура называется выпуклой, если для любых двух ее точек соединяющий их отрезок содержится в фигуре.

Поэтому высказанное утверждение о прямой можно выразить совсем коротко:

Каждая прямая разбивает плоскость на две выпуклые фигуры.

Равносильность этих утверждений аксиоме деления плоскости следует непосредственно из формулировки этой аксиомы.

Все отрезки, содержащие данный, образуют прямую, а потому здесь можно говорить не о данном отрезке a и его продолжениях, а о прямой. Вместе с этим можно говорить о фигурах, содержащих точки, лежащие с одной и с другой стороны. В результате приходим к формулировке:

Всякая прямая a определяет две фигуры, образованные не принадлежащими ей точками так, что если точки A, B принадлежат одной фигуре, то отрезок AB не пересекает прямую a, если же точки A, C принадлежат разным фигурам, то отрезок AC пересекает прямую a.

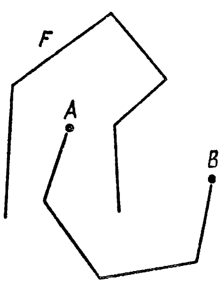

Рис. 88

Последнее, однако, еще непосредственно не значит, что прямая a разбивает плоскость на эти две фигуры. По определению «разбивает» означает, что точки A, B из разных фигур нельзя соединить ломаной (а не обязательно отрезком), не пересекая прямую a. (На рис. 88 точки A, B нельзя соединить отрезком, не пересекая линию F, а ломаной — можно.) Однако в данном случае это оказывается равносильным: точки, лежащие с разных сторон от прямой a, нельзя соединить и ломаной, не пересекая a.

Действительно, пусть A, B — точки, лежащие с разных сторон от прямой a и $AA_1 \ldots A_nB$ — соединяющая их ломаная. Будем проходить ее от вершины к вершине, начиная с A: A_1, A_2 и т. д. Тогда либо мы наткнемся на вершину, лежащую на прямой a, либо — на такое звено A_kA_{k+1} (или A_nB), что A_k лежит с одной стороны от прямой a, а A_{k+1} с другой. Но тогда A_kA_{k+1} пересекает a (рис. 89). Тем самым, a разбивает плоскость, что и требовалось доказать.

То, что отрезок AB не пересекает прямую a, когда точки A, B лежат с одной стороны от нее, равносильно тому, что весь отрезок лежит с той же стороны. Потому что если бы какая-то его точка C лежала с другой стороны, то отрезок AC пересекал бы прямую a. А по аксиоме деления отрезка этот отрезок содержится в AB, так что выходило бы, что отрезок AB пересекает прямую a.

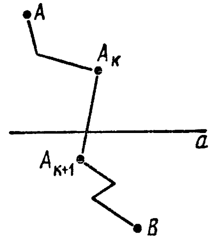

Рис. 89

Таким образом, каждая из фигур, на какие прямая разбивает плоскость, выпукла; и мы приходим к уже высказанной краткой формулировке.

Аксиома разбиения плоскости. *Всякая прямая разбивает плоскость на две выпуклые фигуры.*

Каждая из этих фигур с присоединенной к ней ограничивающей прямой называется полуплоскостью. Сама по себе без этой прямой она называется открытой полуплоскостью. Наглядно она представляет собой «внутренность» полуплоскости: ограничивающая прямая — это «граница» полуплоскости.

Мы говорим о фигурах, ограниченных прямой, но можно спросить: удовлетворяют ли они аксиомам фигуры, высказанным в § 11 гл. 2? Фигура считается определенной, если для каждой точки можно проверить, принадлежит она этой фигуре, или нет. Но как проверить, лежит данная точка с одной или с другой стороны от данной прямой? Чтобы это имело смысл, надо как-то указать данную сторону от данной прямой. Пока это не сделано, еще сомнительно, имеет ли смысл аксиома разбиения плоскости. Впрочем, сделать это очень просто.

Пусть дана прямая a. Возьмем точку A, не лежащую на ней, и скажем: точка M лежит от прямой a с той же стороны, что A, если отрезок AM не имеет с прямой a общих точек, т. е. сама M не лежит на a, и отрезок AM не пересекает a. Это условие очевидно проверяемо для всякой точки и, стало быть, определяет фигуру, содержащую все такие точки M вместе с самой A и никакие другие. Назовем эту фигуру открытой полуплоскостью (a, A) — ограниченной прямой a и заданной точкой A. Аксиому разбиения плоскости можно выразить так: *каждая прямая ограничивает две и только две открытые полуплоскости.*

Это означает следующее (для краткости будем называть открытую полуплоскость просто полуплоскостью). По определению при данной прямой a полуплоскость задается какой-либо точкой A; любая другая точка P также задает полуплоскость (a, P). Аксиома утверждает, что прямая a разбивает плоскость на две открытые полуплоскости (a, A), (a, B), и любая полуплоскость (a, P), определенная другой точкой P, совпадает с одной из них, т. е. по первой аксиоме фигуры все ее точки принадлежат одной из полуплоскостей (a, A), (a, B). Легко видеть, что это определяется тем, где лежит сама точка P — в (a, A) или в (a, B).

В этом развернутом изложении аксиомы разбиения плоскости уже все ясно и проверяемо (поскольку по аксиоме проведения отрезка любые две точки можно соединить отрезком).

Теперь можно сказать, что выражения: «с данной стороны от данного отрезка», или «с разных сторон» означают: «в данной открытой полуплоскости», или «в разных открытых полуплоскостях», ограниченных прямой, содержащей данный отрезок.

§ 23. Треугольники и многоугольники

Треугольник. Треугольник, понимаемый не как фигура из трех отрезков, а как «часть плоскости» — «треугольник с внутренностью» — можно строго определить следующим образом.

Треугольник с внутренностью представляет собою фигуру, образованную всеми отрезками, соединяющими какую-либо вершину треугольника с точками противоположной стороны, т. е. это фигура, содержащая все точки таких отрезков и никакие другие (рис. 90). *При этом фигура получается одна и та же независимо от того, какая из вершин соединяется с точками противоположной стороны.*

Докажем последнее. Пусть ABC — данный треугольник и M — точка на отрезке AD, соединяющем вершину A с точкой D на стороне BC (рис. 91). Нужно показать, что точка M лежит также на отрезке, соединяющем любую другую вершину с точкой противоположной стороны.

Возьмем, например, вершину B. Отрезки AD, AC являются поперечинами угла B. Поэтому луч BM, пересекая AD, пересекает и AC в некоторой точке N (по теореме 3, § 19; рис. 91). Точки B, C лежат с разных сторон

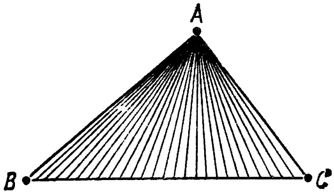

Рис. 90

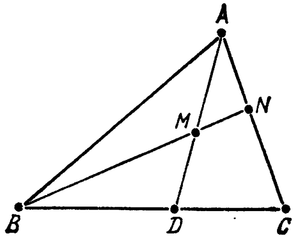

Рис. 91

от AD. Поэтому и отрезок AC лежит не с той стороны, где B. Тем самым точки B и N лежат с разных сторон от AD и, стало быть, точка M лежит на отрезке BN, что и требовалось доказать.

Итак, треугольник с внутренностью получается один и тот же, какую вершину с точками противоположной стороны ни соединить.

Теорема. *Треугольник ограничивает треугольник с внутренностью; этот последний является пересечением трех содержащих его полуплоскостей, каждая из которых ограничена прямой, проходящей вдоль одной из его сторон* (рис. 92).

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и R_A, R_B, R_C — полуплоскости, содержащие соответственно вершины A, B, C и ограниченные прямыми BC, AC, AB (они, тем самым, содержат треугольник ABC). Пусть R — пересечение этих полуплоскостей: точки из R, не принадлежащие самому треугольнику, назовем внутренними.

Убедимся прежде всего, что треугольник ограничивает фигуру R.

Рассмотрим ломаную, соединяющую какую-либо внутреннюю точку P из R с точкой вне R, и докажем, что она пересекает треугольник. Проходя последовательно звенья ломаной от точки P, придем к первому звену MN,

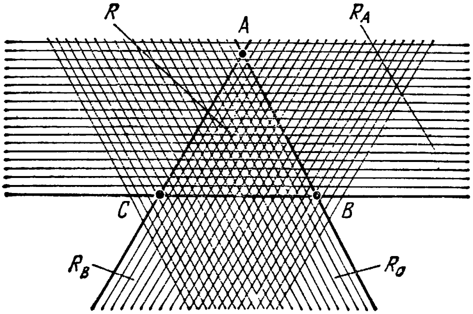

Рис. 92

у которого конец N лежит вне R. Если M принадлежит треугольнику, то уже имеем, что требуется.

Допустим, что M — внутри R, т. е. внутри всех трех полуплоскостей R_A, R_B, R_C. И так как N вне R, то, значит, вне хотя бы одной из этих полуплоскостей. Следовательно, отрезок MN пересекает хотя бы одну из ограничивающих прямых. Три прямые могут иметь с MN не более трех точек пересечения.

Пусть K — «ближайшая» из них к M (в ней MN будет пересекать две прямые, если K — вершина треугольника). Пусть точка K лежит, например, на прямой BC, ограничивающей R_A (рис. 93). Если бы при этом точка K лежала вне стороны BC, то тем самым она лежала бы вне другой полуплоскости — скажем, R_B — и, значит, еще «ближе» к M отрезок MN пересекал бы прямую AC, ограничивающую R_B. Но это противоречило бы выбору точки K. Следовательно, эта точка принадлежит стороне BC.

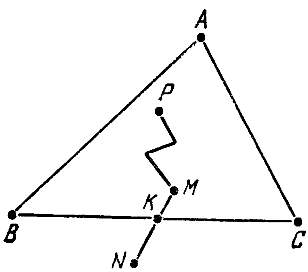

Рис. 93

Тем самым, ломаная, соединяющая внутреннюю точку из R с внешней, необходимо пересекает треугольник, т. е. он ограничивает R, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим тот же треугольник ABC с внутренностью — обозначим его T — и докажем, что он совпадает с R. По определению он заполняется отрезками, соединяющими вершину с точками противоположной стороны.

Пусть P — какая-либо точка из T, так что она лежит на некотором отрезке AD с концом $D \in BC$. Точка A принадлежит полуплоскости R_A, ограниченной прямой BC (рис. 94). Поэтому точка P тоже принадлежит R_A. А так как вершины A, B, C играют одинаковую роль, то точно так же P принадлежит R_B и R_C. Следовательно, точка P принадлежит пересечению их всех, т. е. R. Итак, любая точка из T принадлежит R.

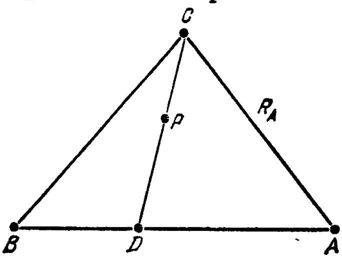

Рис. 94

Теперь надо доказать обратное: произвольная точка из R принадлежит T. Пусть $P \in R$. Проведем луч CP; представляется очевидным, что он пересекает AB в какой-то точке D, так что P лежит на CD и тем самым $P \in T$. Однако, это «очевидное» надо доказать.

Возьмем на AB какую-либо точку E и проведем прямую EP. Она пересечет AC или BC, или пройдет через C. В последнем случае уже получается, что $P \in T$.

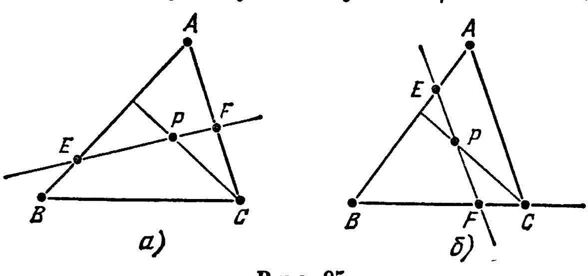

Рис. 95

Допустим, прямая EP пересекает AC в некоторой точке F. Точка P будет лежать на отрезке EF (поскольку E и P лежат с одной стороны от прямой AC; рис. 95, a). Таким образом, прямая CP пересекает сторону EF треугольника AEF и, стало быть, пересекает также его сторону AE, т. е. пересекает AB в некоторой точке D. Точки C и P лежат с одной стороны от AB, так что P лежит на отрезке CD. Тем самым P принадлежит внутренности треугольника ABC.

Если прямая EP пересекает не AC, а BC (рис. 95, *б*), то вывод будет аналогичным.

Таким образом, доказано, что пересечение полуплоскостей R совпадает с внутренностью T треугольника.

Хотя, как доказано, треугольник ограничивает треугольник с внутренностью, определить треугольник с внутренностью просто как «часть плоскости», ограниченную треугольником, нельзя, потому что треугольник ограничивает кроме того еще внешнюю область треугольника. Но можно сказать: треугольник с внутренностью — это «конечная» фигура, ограниченная треугольником [1]. В математике не говорят о фигурах «конечная», но «ограниченная». Мы говорим здесь «конечная», так как оно не только более понятно, но и потому, что «ограниченная фигура, ограниченная треугольником», звучало бы довольно нелепо.

Фигура называется **ограниченной** — **«конечной»**, если расстояния между ее точками ограничены в том смысле, что существует отрезок, который больше всякого отрезка с концами в точках фигуры. Это равносильно тому, что фигура может быть заключена в круг.

Можно еще сказать о треугольнике так: *треугольник разбивает плоскость на две фигуры — ограниченную и не ограниченную*; первую часто называют также треугольником, мы же назвали ее треугольником с внутренностью.

Угол. Если слово «треугольник» понимают в двух смыслах, то применение слова «угол» еще более разнообразно. По нашему определению угол образуется парой отрезков с общим концом. Но принято так же определять угол как пару лучей с общим началом или как часть плоскости, ограниченную такими двумя лучами [2]. Два луча ограничивают в этом смысле два угла. Если лучи не образуют одну прямую, то один угол меньше, другой больше.

---

[1]) Это определение не удовлетворяет аксиоме фигуры: нужно указать, как узнать, принадлежит данная точка M данному треугольнику с внутренностью или нет. Она принадлежит ему, если луч CM пересекает AB, т. е. приходим к предыдущему.

[2]) Можно еще заметить, что углом также называют и величину угла, и угол поворота, который может быть больше 360°. В жизни говорят «в углу» и «на углу»..

Если иметь в виду угол, меньший развернутого, то можно определить *его внутренность как фигуру, образуемую лучами, идущими в угле из вершины, т. е. пересекающими поперечины.* При этом справедлива теорема: *Угол с внутренностью ограничен сторонами угла и является пересечением тех двух полуплоскостей, каждая из которых ограничена прямой, содержащей одну сторону угла, и содержит другую его сторону.*

Доказательство мы оставляем читателю.

Многоугольник. Под многоугольником, как, в частности, под треугольником, понимают как фигуру, образованную отрезками, так и ограниченную ею часть плоскости. Воспроизведем точные определения.

Ломаная называется *простой*, если ее звенья не имеют общих точек помимо общих концов у соседних звеньев, *и замкнутой*, если ее концы совпадают.

Многоугольником называется фигура, образуемая точками простой замкнутой ломаной (мы не говорим, что многоугольник — это простая замкнутая ломаная, потому что у ломаной могут быть звенья, образующие один отрезок; фигура же определяется своими точками).

Многоугольником называется также «конечная» фигура, ограниченная многоугольником в только что определенном смысле, включая и сам этот многоугольник; без него это будет внутренность многоугольника. Поэтому, как и в случае треугольника, нужно различать многоугольник (в первом смысле) и *«многоугольник с внутренностью»*.

Справедливы две важные теоремы.

1 (теорема Жордана). *Всякий многоугольник ограничивает многоугольник с внутренностью.* Хотя это представляется очевидным, но доказательство трудное (выше мы доказали это для треугольников).

2. *Всякий многоугольник с внутренностью можно разбить на треугольники диагоналями так, что вершинами этих треугольников служат только вершины самого многоугольника.* Эта теорема доказывается тоже не просто. «Разбить на треугольники» значит представить как объединение треугольников с внутренностями, из которых никакие два не имеют общих внутренних точек. (Аналогично понимается «разбить на квадраты», вообще — на многоугольники).

Попробуйте строго доказать обе теоремы, сначала хотя бы для четырехугольников, а потом в общем виде.

Как известно, многоугольник называется *выпуклым*, если он заключается в некоторой полуплоскости, ограниченной прямой, содержащей его сторону (рис. 96); и так для каждой стороны.

Для выпуклых многоугольников верны следующие теоремы.

1. *Многоугольник с внутренностью, ограниченный выпуклым многоугольником, является выпуклой фигурой.*

2. Обратно: *если многоугольник с внутренностью является выпуклой фигурой, то он ограничен выпуклым многоугольником.*

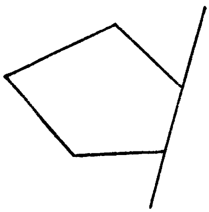

Рис. 96

3. *Выпуклый многоугольник с внутренностью является пересечением полуплоскостей, каждая из которых ограничена прямой, содержащей сторону многоугольника, и содержит все вершины многоугольника.*

4. *Выпуклый многоугольник с внутренностью образуется отрезками, соединяющими любую из его вершин с точками на его сторонах.*

5. *Выпуклый многоугольник с внутренностью разбивается на треугольники диагоналями, проведенными из любой его вершины.*

Доказательство мы оставляем читателю.

§ 24. Граница, внутренность, открытые множества

В двух предыдущих параграфах рассматривались только фигуры, ограниченные отрезками и лучами. Здесь введем некоторые определения для любых фигур.

Точка считается граничной для данной фигуры, если, так сказать, сколь угодно «близко» от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Это означает: точка называется *граничной точкой* фигуры, если каждый круг с центром в этой точке содержит как точки самой фигуры, так и не принадлежащие фигуре точки (точка A на рис. 97). Граничная точка может принадлежать фигуре, а может и не принадлежать ей. Множество граничных точек фигуры называется ее *границей*.

Точка фигуры, не являющаяся ее граничной точкой, называется *внутренней*. Иными словами, внутренняя точка — это точка, являющаяся центром круга, целиком содержащегося в фигуре (точка B на рис. 97). Внутренние точки образуют *внутренность фигуры*.

Точки, не принадлежащие ни самой фигуре, ни ее границе, можно назвать *внешними* для фигуры. Другими словами, точка внешняя, если вокруг нее есть круг, не содержащий точек фигуры (точка C на рис. 97).

Внутренность треугольника, угла, многоугольника, как она определялась в предыдущем параграфе, является их внутренностью в смысле только что данного общего определения. Стороны же треугольника, угла, многоугольника образуют их границы. (И то, и другое надо доказать, но мы оставляем это читателю.)

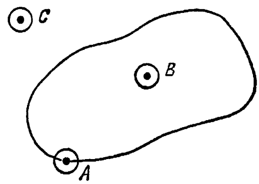

Рис. 97

Фигура, не содержащая граничных точек, так что все ее точки внутренние, называется *открытым множеством*. Открытое множество, любые две точки которого можно соединить в нем ломаной, называется *областью*.

Фигура, содержащая всю свою границу, называется *замкнутым множеством*. Область вместе с границей называется *замкнутой областью*. Иначе можно сказать, что

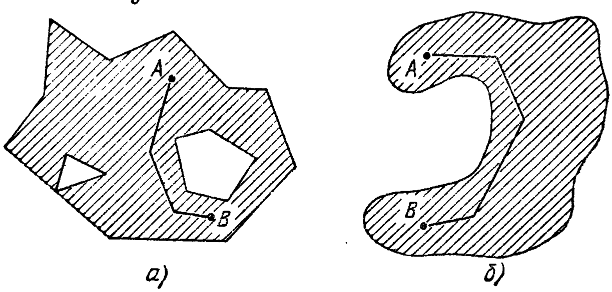

Рис. 98

замкнутая область это фигура, обладающая следующими тремя свойствами:

(1) она содержит свою границу;

(2) ее граница является границей ее внутренности (вблизи каждой граничной точки есть внутренняя точка);

(3) любые две внутренние точки соединены внутри фигуры ломаной (рис. 98).

Эти общие определения не имеют особого значения в элементарной геометрии, в ней без них можно обойтись; они относятся, скорее, к топологии. Однако понятие границы полезно в учении о площади (гл. 8). Можно заметить, что все основные фигуры элементарной геометрии, имеющие внутренние точки, являются замкнутыми областями: полуплоскость, угол, многоугольник с внутренностью, круг, сегмент и др. (Внешность многоугольника тоже область, но бесконечная.)

Под многоугольником нередко понимают, вообще, конечную замкнутую область, границу которой образует конечное число отрезков (рис. 98, *а*). Это понятие важно потому, что грани многогранника могут быть такими «общими» многоугольниками как заштрихованный на рис. 99.

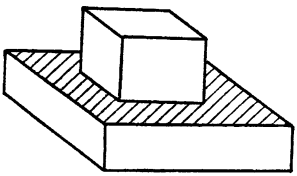

Рис. 99

Замечание 1. Если к области присоединить ее границу, то получится замкнутая область. Но граница замкнутой области может не содержать всю границу исходной области. Самый простой пример: внутренность круга с одним удаленным радиусом; она представляет собой область, и удаленный радиус входит в ее границу вместе с окружностью. Но границей замкнутой области будет только окружность.

По определению, данному в § 22, фигура F из отрезков и лучей ограничивает G, если ломаная, соединяющая точки из G с внешними точками, обязательно пересекает F. Для общих фигур такое определение не годится, несмотря на то, что каждая ломаная, соединяющая внутреннюю точку фигуры с внешней, пересекает ее границу (как это можно доказать?).

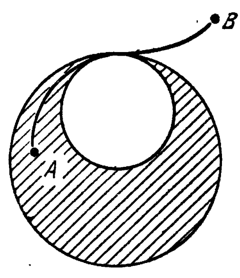

Рис. 100

Рассмотрим, например, фигуру, ограниченную двумя касающимися окружностями, одна из которых содержится внутри другой, т. е. в ограниченном ею круге (рис. 100). Окружности образуют границу этой фигуры. Если исключить из нее точку касания окружностей, то из внутренности фигуры можно будет «выйти» по кривой, проходящей через эту точку. Но по ломаной — невозможно.

Общее определение понятия: одна фигура ограничивает другую, мы давать не будем, так как оно в элементарной геометрии не нужно.

Замечание 2. Из того, что фигура F ограничивает фигуру G, еще не следует, что она образует ее границу. Например, продолжив стороны треугольника, получим фигуру, ограничивающую тот же треугольник.

Теорема. *Фигура F из отрезков и лучей, ограничивающая фигуру G, служит ее границей тогда и только тогда, когда из нее нельзя удалить ни одной точки, сохраняя то, что она ограничивает G.*

Докажите эту теорему. Кстати, она позволяет определить границу фигуры, когда граница составляется из отрезков и лучей. Сформулируйте такое определение.

Простейший пример фигуры, не состоящей из отрезков и лучей, представляет окружность. Окружность — множество точек M со свойством $OM = r$, ограничивает как круг $OM \leqslant r$, так и его внутренность: $OM < r$. Однако надо строго доказать, что если $OA < r$ для точки A, то имеется круг с центром A, содержащийся в данном круге. Докажите.

Докажите также: всякая пара радиусов как и всякая хорда разбивает круг на две фигуры; в первом случае (вместе с радиусами) — это секторы, во втором (вместе с хордой) — сегменты. Почему хорда — отрезок, концы которого лежат на окружности,— не может иметь с окружностью еще других общих точек? Докажите, что не может.

§ 25. Координаты на плоскости

Полученные выводы позволяют хорошо известным способом ввести на плоскости прямоугольные координаты (только выводы § 19—20 здесь не играют роли).

Выбираем единицу измерения отрезков. Берем какую-либо прямую и вводим на ней координату x как описано в конце гл. 3. Прямая становится координатной осью x; на ней имеем начало координат O, положительную и отрицательную полуоси. Через начало проводим перпендикулярную ей прямую (это возможно по выводу § 18). На проведенной прямой вводим координату с тем же началом и с той же единицей длины; обозначаем эту координату y и прямую называем осью y.

Теперь каждой точке M сопоставляем пару значений координат x_M, y_M по известному правилу. Если точка лежит на оси x, то за x_M принимается значение ее координаты x, а $y_M = 0$. Аналогично — если M на оси y. Если же M не лежит ни на одной из осей, то опускаем из нее перпендикуляры на оси, это возможно по выводу § 18. Так получаем на осях ее проекции M_x, M_y (рис. 101). Координаты этих точек на осях и принимаются за координаты x_M, y_M точки M. Таким образом на плоскости вводятся прямоугольные координаты.

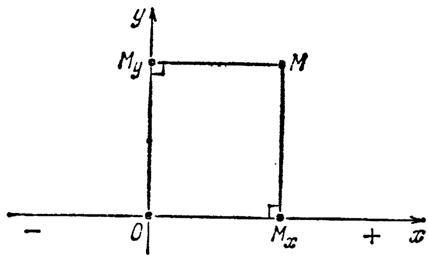

Рис. 101

Теперь покажем, что каждой упорядоченной паре чисел[1]) x_0, y_0 соответствует и притом единственная точка M, для которой $x_M = x_0$, $y_M = y_0$.

Пусть дана упорядоченная пара чисел x_0, y_0. Если, скажем, $y_0 = 0$, то берем точку M на оси x с координатой x_0. Если же оба числа x_0, y_0 отличны от нуля, то на осях есть вполне определенные точки M_x, M_y с координатами x_0, y_0 и, соответственно, отрезки OM_x, OM_y. Из точки M_x проводим отрезок M_xM, равный OM_y, перпендикулярный оси x и расположенный по ту же сторону от нее, с какой лежит точка M_y (рис. 101). Так как отрезок OM_y перпендикулярен оси y, то это то самое построение, какое фигурирует в аксиоме параллельных отрезков. По следствию этой аксиомы отрезок MM_y перпендикулярен оси y. То есть оказывается, что точка M_y — та самая, координата y которой является координатой точки M. Таким образом, точка M имеет как раз данные координаты x_0, y_0. Другой точки с такими координатами, очевидно, нет, так как такая точка является пересечением перпендикуляров к осям в точках M_x, M_y.

Таким образом, между точками и всевозможными упорядоченными парами чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие.

[1]) Упорядоченная пара — такая, в которой указано, какой из элементов этой пары первый, какой второй.

Оси образуют четыре прямых угла. Эти углы с их внутренностями называются квадрантами: стороны первого квадранта — обе положительные полуоси; в нем $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а внутри $x > 0$, $y > 0$; во втором квадранте $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; в третьем квадранте $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$; в четвертом квадранте $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Внутри квадрантов координаты не обращаются в нуль, так что каждая имеет определенный знак (рис. 102).

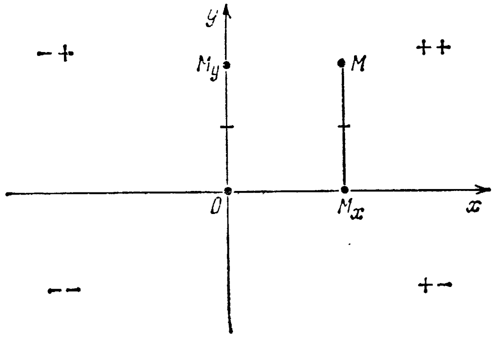

Рис. 102

Введение координат дает основание для аналитической геометрии — для применения алгебры. Оно начинается с вывода выражения для расстояния между точками (или что то же — для длины отрезка) из теоремы Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \qquad (1)$$

Дальше следует представление прямой линейным уравнением. Оно получается либо с помощью теоремы о подобных треугольниках, либо из формулы (1) на основании той теоремы, что множество точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая. Впрочем, сама теорема Пифагора, а стало быть, формула (1), доказывается из подобия треугольников (или с помощью площадей, но это требует обоснования учения о площади).

Вывод нужных здесь теорем о подобии треугольников мы рассматривать не будем, отсылая к известным учебникам, где такой вывод дан с надлежащей строгостью [1]).

---

[1]) Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1982. Погорелов А. В. Геометрия 6—10.— М.: Просвещение, 1980—82.

§ 26. Равенство фигур

Две фигуры F, F' называются *равными*, если между их точками можно установить такое соответствие, что отрезки с соответственными концами равны. То есть каждым двум точкам A, B из F отвечают в F' такие две точки A', B', что $A'B' = AB$, и обратно: каждым двум точкам C', D' из F' отвечают в F такие две точки C, D, что $CD = C'D'$ (рис. 103). Говорят также, что одна фигура равна другой: $F' = F$ и $F = F'$. Ясно, что упомянутое соответствие непременно будет взаимно однозначным (см. ниже).

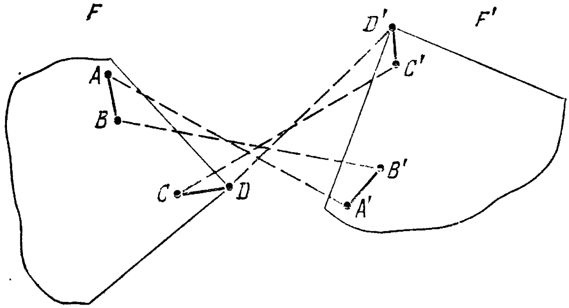

Рис. 103

Равенство отрезков (которое является у нас основным, неопределяемым понятием) подпадает под это определение. Действительно, пусть отрезок $A'B'$ равен AB. Сопоставим концу A' конец A. Затем каждой другой точке M отрезка AB сопоставим такую точку M' в $A'B'$, что $A'M' = AM$. Пусть теперь M, N — две точки отрезка AB, отличные от A, и M', N' — соответствующие точки отрезка $A'B'$. Один из отрезков AM, AN содержится в другом; например, $AN \subset AM$, так что отрезок NM является разностью $AM - AN$. Тогда ввиду равенств отрезков: $AM = A'M'$ и $AN = A'N'$ равны их разности, т. е. $N'M' = NM$. Таким образом, каждой паре точек N, M из AB отвечает такая пара точек N', M' из $A'B'$, что $N'M' = NM$, что и требовалось доказать[1]) (в част-

[1]) Проследим, на чем основан приведенный вывод. Точке M из AB сопоставляется точка M' отрезка $A'B'$ так, что вдоль $A'B'$ откладывается отрезок $A'M'$, равный AM (что возможно по аксиоме). Точка M' будет принадлежать отрезку $A'B'$, так как $AM \leqslant AB$, $A'B' = AB$ и, стало быть, $A'M' \leqslant A'B'$ (по доказанному в § 13 об

ности, если N совпадает с A, то $A'M' = AM$ по определению соответствия).

Далее, мы определили равенство углов: два настоящих — неразвернутых угла равны, если у них есть равные соответственные поперечины. Но тогда, по аксиоме, и все соответственные поперечины равны (аксиома IV_{26} из § 9). По определению соответственных поперечин это значит следующее. Если на сторонах углов O, O' точки A, B и A', B' таковы, что $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, то также $A'B' = AB$. Тем самым, если на сторонах установить соответствие по равенству отрезков от вершин, то будут равны и отрезки с концами в соответственных точках на сторонах. Соответствие же равных отрезков от вершин: $O'A' = OA$, $O'B' = OB$ обеспечивает равенство отрезков вообще между соответственными точками на сторонах, как показано в предыдущем выводе о равенстве отрезков. Если стороны угла понимаются как лучи, то любым точкам на сторонах одного угла сопоставляются точки на сторонах другого по равенству отрезков от вершин.

Таким образом, между точками равных углов, образуемых лучами, устанавливается такое соответствие, которое требуется определением равных фигур. Тем самым эти углы равны как фигуры. То же будет и для углов, образованных соответственно равными отрезками.

Отсюда непосредственно следует, что равенство треугольников, определенное по равенству их сторон и углов, является их равенством как фигур: между их точками есть нужное соответствие.

Вернемся к общему определению равенства фигур; убедимся, что согласно этому определению *равенство фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно*. Симметричность заключается в самом определении, так как в нем обе фигуры F, F' играют одинаковую роль. Рефлексивность также очевидна: стоит лишь сопоставить каждой точке фигуры саму эту точку и мы получим, что фигуры равны самим себе.

Докажем транзитивность. Пусть $F = F'$ и $F' = F''$, так что двум точкам A, B из F отвечают такие точки A',

---

алгебре отрезков). Далее, пусть M, N — две точки отрезка AB, отличные от A. Если $M = B$, то $AN \subset AM$. Если же M и N на AB, то либо N на AM, так что $AN \subset AM$, либо N на BM и тогда (по лемме 2, § 12) M на AN, так что $AM \subset AN$. Таким образом, один из отрезков AM, AN содержится в другом.

B' из F', что $A'B' = AB$; а точкам A', B' отвечают такие точки A'', B'' из F'', что $A''B'' = A'B'$. Таким образом, паре A, B из F отвечает пара A'', B'' из F'', и по транзитивности равенства отрезков получаем, что $A''B'' = AB$. Аналогично убедимся, что любой паре точек C'', D'' из F'' отвечает в F такая пара точек C, D, что $CD = C''D''$. Таким образом, $F'' = F$, чем транзитивность доказана.

Определение равенства фигур чаще формулируют иначе, чем это было сделано выше; фигура F' называется равной фигуре F, если F можно так отобразить на F', что каждым двум точкам A, B из F соответствуют такие точки A', B', что $A'B' = AB$. В этом определении, в отличие от исходного, фигуры играют разную роль; однако оно равносильно исходному. То, что фигура F отображается на F', означает, что каждая точка M' из F' соответствует какой-либо точке M из F. К тому же такая точка M, которой соответствует данная M', единственная, потому что двум точкам M, N из F соответствуют разные точки M', N', поскольку $M'N' = MN$.

Таким образом, имеется обратное отображение: каждой точке C' и F' отвечает некоторая точка C из F и для двух точек C', D' $CD = C'D'$.

Следовательно, фигуры F, F' равны друг другу в смысле исходного определения.

Отображение, фигурирующее в данном определении равенства фигур, называют *перемещением*, *наложением* или *движением* и говорят: фигура F' равна F, если существует перемещение, отображающее F на F' или, более наглядно, F налагается на F', или F' «получается» из F перемещением.

ГЛАВА 5

ОТВЛЕЧЕННОЕ ПОНИМАНИЕ АКСИОМАТИКИ

§ 27. Разные понимания аксиоматики. Аксиомы как определения

Основные понятия и аксиомы, а вместе с ними и саму геометрию можно понимать по-разному — на разных уровнях абстракции.

По изначальному своему значению понятия и выводы геометрии имеют наглядный, заимствованный из практики смысл, хотя и выражают его в идеализированном, абстрактном виде. Соответственно, при этом основные понятия и аксиомы тоже понимаются как выражающие это наглядное содержание, как отрезок представляется идеальной нитью и т. п.

Короче говоря, на первичном уровне абстракции предмет геометрии, а стало быть, и ее аксиоматика понимаются в наглядно-содержательном смысле. Так мы и подошли к аксиоматике, изложенной в гл. 2. Так же подходят к аксиомам в школьном изложении, показывая их смысл на чертежах, так же излагал их Евклид, предпослав им определения, описывающие основные объекты геометрии в наглядных терминах, обращаясь к воображению.

Однако задача аксиоматики состоит в том, чтобы явно выразить все, что требуется для получения теорем геометрии. Поэтому если аксиоматика соответствует этой своей цели, если она в самом деле выражает все, необходимое для выводов геометрии, то нужно вовсе отвлечься от наглядных представлений, чтобы быть уверенным в том, что выводы получаются действительно посредством логических рассуждений, без ссылок на очевидность и т. п. Наглядные представления могут служить для фиксации мысли подобно записи, но никак не основанием для выводов.

Так возникает отвлеченный от всякого содержания формальный взгляд на геометрию и ее аксиоматику, в котором основные понятия и аксиомы берутся только как предпосылки логических выводов. А раз так, то основные понятия толкуются как лишенные всякого содержания помимо того, какое явно выражено в аксиомах, а аксиомы не выражают ничего, кроме явно указанных в них связей основных понятий.

Можно сказать так: если спрашивают, что такое отрезок, то на наглядном уровне можно ответить: образ натянутой нити без всякой толщины, но ответом на формальном уровне будет: отрезок — это то, о чем под названием «отрезок» говорят аксиомы.

В этом смысле аксиомы служат «скрытыми» определениями основных понятий, а эти последние обозначают любые объекты и отношения, для которых только выполнено то, что утверждается в аксиомах. Принято говорить, что аксиомы могут относиться к «объектам и отношениям произвольной природы», лишь бы выполнялось сказанное в аксиомах.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере.

Представим себе плоскость, на которой введены прямоугольные координаты x, y. Определим основные понятия нашей аксиоматики следующим образом. «Точкой» называется точка в обычном смысле. «Отрезком» с концами $A(x_0, y_0)$, $B(x_0, y_0)$ называется линия, образуемая точками $M(x, y)$ с координатами

$$x = \sqrt[3]{(1-t)\,x_0^3 + t x_1^3}, \quad y = (1-t)\,y_0 + t y_1; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Эти точки M будут принадлежать «отрезку» AB (кроме A и B они «лежат на отрезке»).

Припишем такому отрезку длину

$$|AB| = \sqrt{(x_1^3 - x_0^3)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \tag{2}$$

Два отрезка называем равными, если у них равны такие длины.

При указанном определении основных понятий все аксиомы планиметрии будут выполняться! Но отрезки будут, вообще говоря, изображаться кривыми, и некоторые из них будут очень мало походить на туго натянутую нить. Исключив из формул (1) параметр t, убедимся, что точки $M(x, y)$ отрезка расположены на кривой с уравнением вида

$$y = kx^3 + l, \tag{3}$$

если $x_1 \neq x_0$. При $x_1 = x_0$ получается прямая $x = x_0 = \text{const}$, так же как при $y_1 = y_0$ — прямая $y = y_0 = \text{const}$ (рис. 104).

Таким образом, наши «отрезки» являются дугами кубических парабол или отрезками прямых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

На первый взгляд может показаться неясным и сомнительным, что тут выполняются аксиомы планиметрии. Грубо говоря, пойди — убедись! Но на самом деле все обстоит очень просто.

Мы произвели преобразование плоскости, сопоставляя каждой точке (x, y) точку с координатами

$$\bar{x} = \sqrt[3]{x}, \quad \bar{y} = y. \tag{4}$$

Отрезки при этом преобразуются в соответствующие кривые, но мы сохраним за этими кривыми названия «отрезки» и будем считать «равными» те, которые получились из равных отрезков. Понятно, что при таких условиях аксиомы планиметрии будут выполняться.

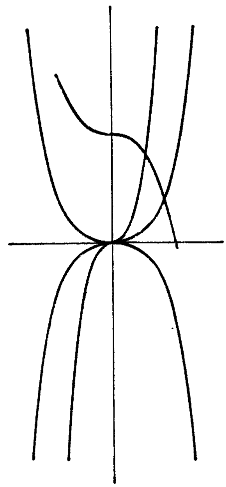

Рис. 104

Из формул (4) следует, что прямая $y = kx + l$ преобразуется в кривую (3): $\bar{y} = k\bar{x}^3 + l$. Обычное выражение расстояния превратится в формулу (2), а отрезок, представленный параметрическими уравнениями

$$x = (1 - t)x_0 + tx_1, \quad y = (1 - t)y_0 + ty_1,$$

перейдет в линию с уравнениями (1).

Здесь в частном виде выражена общая идея. Подвергнем плоскость произвольному взаимно однозначному отображению. Назовем «отрезками» образы отрезков при этом отображении и сохраним все отношения (приписываем óбразам те же отношения, какие есть у прообразов: равными отрезками считаются образы равных отрезков; концами «отрезков» — образы концов, «точками» — образы точек, которым они соответствуют при отображении). Можно сказать: все сохраняется, только переносится на то, что получается при отображении.

Так мы получаем, в принципе, бесконечное множество разных возможных представлений элементарной планиметрии.

В нашем примере отображение представлялось формулами (4) в прямоугольных координатах. С таким же успехом можно взять $\bar{x} = \sqrt[n]{x}$, $\bar{y} = \sqrt[m]{y}$ с любыми нечетными n и m, чтобы отображение было взаимно однозначно. И мало ли какие кривые или даже разрывные множества можно «изготовить» из отрезков и назвать «отрезками».

А вот пример в другом роде. Назовем точками шары данного диаметра, отрезками — цилиндрические трубы того же диаметра. Концами будут два шара, у которых края цилиндра как раз приходятся на большие круги; если же большой круг на цилиндре, но не на краю, то «точка» лежит на «отрезке». Продолжить такое представление планиметрии или стереометрии читатель может сам.

Вернемся к общему вопросу о двух пониманиях аксиом и резюмируем общий вывод.

Аксиоматику геометрии можно понимать двояко: наглядно-содержательно и отвлеченно. В первом случае основные понятия толкуются в их исходном наглядном виде и в этом смысле являются объектами и отношениями «определенной природы». Аксиомы же представляют собой описание свойств этих объектов и отношений.

В противоположность этому при отвлеченном понимании аксиоматики ее основные понятия толкуются как относящиеся к объектам и отношениям «произвольной природы», лишь бы для них выполнялось сказанное в аксиомах. Аксиомы в этом понимании представляют собой определения основных объектов и отношений. Как уже было сказано, например, отрезком называется объект, для которого вместе с другими объектами, называемыми точками и отрезками, с отношениями между ними, названными в аксиомах, выполняется все то, что сказано в аксиомах.

Так вообще понимают аксиомы в математике. Они дают определение предмета той теории, которая строится на данных аксиомах.

Такие определения называются *аксиоматическими*. Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется через другое. В отличие от этого в аксиоматическом определении понятия разъясняются совместно, через их связь. Как это видно на примере приведенного выше определения отрезка.

Такие определения, когда понятия разъясняются друг через друга, можно назвать соотносительными. На них обратил внимание Маркс в «Капитале», приведя пример короля и подданных. Данный человек лишь постольку король, поскольку у него есть подданные, а люди — подданные, поскольку у них есть король. Таких примеров можно привести очень много: начальник и подчиненные, центр и окружность, и т. д., и т. п.

§ 28. Понятия интерпретации и непротиворечивости аксиоматики

Отвлеченно рассматриваемая аксиоматика сама по себе ни к чему сколько-нибудь определенному не относится, так что не ясно, какой смысл она имеет; не представляет ли она просто набор слов? Для аксиоматики евклидовой геометрии, хотя бы мы и понимали ее отвлеченно, это не так, потому что в ней заключен первоначальный наглядный смысл. Но мыслимы другие системы аксиом.

Известно, что в начале прошлого столетия Н. И. Лобачевский заменил аксиому параллельных противоположной: через точку вне данной прямой проходят, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную. Исходя из этой аксиомы, он развил последовательность выводов, представляющих новую, как он сам говорил — «воображаемую» геометрию. Смысл ее оставался неясным. Потому что не было предмета, хотя бы абстрактного, к которому она относилась бы (такой предмет был найден позже). Основы геометрии Лобачевского тем самым носили отвлеченный характер. На вопрос о ее предмете можно было ответить только, что это то, о чем мы рассуждаем, или что определяется принятыми аксиомами. (Точного перечня аксиом Лобачевский не формулировал, но это не имеет значения — они подразумевались.) Для того чтобы отвлеченная аксиоматика получила более определенный смысл, нужно найти предмет — модель, где бы она выполнялась, где бы она относилась не к «объектам произвольной природы», а к определенным объектам и отношениям — «определенной природы».

Модель или, как еще говорят, интерпретация аксиоматики представляет собой, коротко говоря, совокупность *некоторых объектов с отношениями, для которых выполняются аксиомы.*

Говоря подробнее, основные объекты и отношения аксиоматики сопоставляются объектам модели и определенным, имеющимся между ними отношениям. Если при этом для объектов и отношений модели выполняется то, что говорится в аксиомах (если эти объекты и отношения назвать словами, принятыми в аксиомах), то мы и получаем тем самым интерпретацию аксиом. Или, как еще говорят, аксиомы реализуются на данной модели.

Например, модель для наших линейных аксиом можно построить с помощью вещественных чисел. Именно: сопоставляем точкам числа, отрезкам — числовые промежутки; отношения «точка лежит на отрезке» или «служит его концом» интерпретируются очевидно. Отношению равенства отрезков сопоставляется равенство длин числовых промежутков (длина есть модуль разностей чисел, служащих концами промежутка). Эта модель, собственно, и получается при введении на прямой координаты, как сделано в конце гл. 3, в § 17. Обратившись туда, легко проверить, что линейные аксиомы здесь выполняются.

Модель, в которой реализуется геометрия Лобачевского, будет рассмотрена позже, в § 39—40. Здесь же мы обратимся к дальнейшим общим соображениям.

Для отвлеченной аксиоматики самой по себе неизвестно, могут ли выводы из нее привести к противоречию, т. е. к двум таким выводам, в одном из которых что-то утверждается, а в другом оно же отрицается. Такая *аксиоматика, заключающая в себе противоречие, заведомо не может реализоваться и не имеет никакого смысла. Если такие противоречия не могут получиться, аксиоматика называется непротиворечивой.*

Вопрос о непротиворечивости аксиоматики решается тем, что находят ее модель — реализуют ее на таких мыслимых объектах и отношениях, для которых противоречия невозможны или, говоря скромнее, представляются невозможными.

Этот вопрос о непротиворечивости имеет смысл и для евклидовой геометрии. Пока она ограничивается выводами, имеющими ясный наглядный смысл, вопрос о непротиворечивости, можно считать, не встает. Но там, где с появлением бесконечности наглядность ускользает и практическая проверяемость исчезает[1]), может возникнуть сомнение: а не могут ли выводы геометрии на этом уровне приводить к противоречию? Идеальный предмет геометрии — это продукт нашей мысли и воображения, и не вносим ли мы в него что-либо такое, что может вести к противоречию?

Мы уже обратили внимание на то, что наши линейные аксиомы реализуются на числовой модели с вещественными числами: точно так же можно видеть (и это будет доказано в § 30), что все аксиомы планиметрии выполняются на числовой модели, какую представляет аналитическая геометрия. Поэтому противоречие в геометрии оказалось бы противоречием в теории вещественных чисел. Тем самым аксиоматика планиметрии непротиворечива, по меньшей мере настолько же, насколько непротиворечива арифметика — теория вещественных чисел. На этом уровне мы и установим непротиворечивость геометрий Евклида и Лобачевского.

Однако, надо сказать, в этом результате нет окончательного исчерпывающего доказательства непротиворечивости геометрии, так как его нет для теории вещественных чисел. Однако значение данного результата состоит, прежде всего в том, что геометрия включается в ту подавляющую часть математики, которая основана на теории вещественных чисел — на ней основан весь анализ со всеми его ответвлениями. Сама же теория вещественных чисел строится на достаточно ясных основаниях, хотя, как уже сказано, тоже нуждающихся с более глубокой точки зрения в выяснении непротиворечивости.

Суть в том, что предмет геометрии, как и теории вещественных чисел, и всякой математической теории, представляет собою абстракцию. Поэтому на моделях одни абстракции интерпретируются с помощью других, а без абстракций теряется самый предмет математической теории в его идеальной точности. Поэтому доказательство непротиворечивости неизбежно сводит одну теорию на другую, хотя бы и более простую, но также нуждающуюся в доказательстве непротиворечивости. Мы еще обсудим этот глубокий вопрос в последней главе.

---

[1]) То, что требует бесконечной точности, практически не проверяемо и наглядно, на самом деле, не представимо. И уж тем более нельзя ни проверить, ни представить, что фигура, скажем, «состоит» из точек.

§ 29. Понятие изоморфизма. Полнота системы аксиом

Мы, естественно, представляем себе, что плоскость с ее планиметрией — это вполне определенный объект, со своей определенной геометрией в том смысле, что на ней осуществляются определенные отношения фигур. Соответственно, мы должны требовать от аксиоматики, чтобы она давала основание для полного построения планиметрии, чтобы каждый ее факт выводился из аксиом.

Это представление уточняется в математическом требовании полноты системы аксиом. Для того чтобы определить это требование, вводится важное понятие изоморфизма моделей.

Представим себе две системы объектов с отношениями между ними. *Пусть между их объектами, а также между отношениями установлено такое взаимно однозначное соответствие, что соответственные объекты находятся в соответственных отношениях.* То есть если объекты a, b, ..., e одной системы S находятся в отношении R, то соответствующие им объекты a', b', ..., e' другой системы S' находятся в соответствующем отношении R', и обратно: если объекты системы S' находятся в некотором отношении P', то соответствующие объекты системы S находятся в соответствующем отношении. *Такое соответствие называется изоморфизмом. А системы, для которых может быть установлено такое соответствие, называются изоморфными.*

Приведем примеры. Пусть объекты системы S — это числа 1, —1; а отношение — это отношение множителей к произведению: $xy = z$. Объекты системы S' — это отражение в данной прямой и тождественное отображение; отношение — композиция отображений. Сопоставим тождественное отображение числу 1, отражение числу —1, композицию отображений — умножению чисел. Получим, очевидно, полное соответствие — изоморфизм.

Другой пример. Пусть объекты x системы S — это вещественные числа с двумя отношениями: порядка («больше — меньше») и слагаемых к сумме. Объекты y системы S' — положительные числа с тем же отношением порядка и отношением сомножителей к произведению. Взяв любое число $a > 1$, положим $y = a^x$. Это устанавливает соответствие как между объектами систем S и S', так и между отношениями: так как $a^{x_1} > a^{x_2}$ равносильно $x_1 > x_2$ и $a^{x_1+x_2}$ равно $a^{x_1}a^{x_2}$.

В изоморфных системах все соотношения в одной из них соответствуют соотношениям в другой. Если назвать соответственные объекты и отношение одними и теми же словами, то теоремы об этих системах будут звучать одинаково; они будут неразличимы. Поэтому изоморфные системы служат как бы разными представлениями или моделям одного и того же отвлеченного предмета.

Система аксиом называется полной, если все ее возможные модели изоморфны друг другу[1]. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы они были изоморфны какой-нибудь одной из них. Имея в виду только что сказанное об изоморфных системах, это можно выразить так: *система аксиом полная, если у нее единственная модель «с точностью до изоморфизма».*

Именно это мы и имеем в виду, если вдуматься, когда говорим, что планиметрия только одна: все возможные ее модели изоморфны, и аксиоматика ее должна быть полной. Разные ее модели, разные ее аксиоматики — только разные изображения и описания одного и того же предмета — «евклидовой плоскости».

Наша система аксиом планиметрии полная. Действительно, как показано в гл. 3, 4 из нее следует возможность ввести координаты и построить с ними числовую модель. Поэтому, какова ни будь модель планиметрии, в ней можно ввести такие же координаты и с их помощью установить, что данная модель изоморфна числовой. Эта числовая модель подробно излагается в следующем параграфе.

Вообще рассматривают три свойства аксиом: непротиворечивость, полноту, независимость; полезно сопоставить все три вместе.

1. Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее не следует какое-либо утверждение вместе с его же отрицанием.

В следующих двух определениях имеются в виду непротиворечивые системы аксиом.

2. Аксиомы называются *независимыми*, если ни одна из них не следует из других.

---

[1]) Подразумевается, что система аксиом непротиворечива, т. е. имеет модели. В математической логике система аксиом, полная в смысле данного здесь определения, называется категоричной; термин «полная» употребляется в другом смысле.

3. Система аксиом называется *полной*, если она не может быть пополнена никакой новой аксиомой (касающейся тех же основных понятий), которая из имеющихся аксиом не следовала бы и им не противоречила. Только в этой формулировке слово «следовала» надо понимать так: утверждение B следует из аксиом A, если во всякой модели, где выполнены аксиомы A, выполняется и B. Если же есть модель аксиоматики A, где B не выполняется, то B не следует из A [1]).

Имеют место три утверждения.

1. Система аксиом непротиворечива, если она реализуется в какой-либо модели. (Это уже обсуждалось в § 28.)

2. В системе аксиом данная аксиома независима от других, если есть модель, в которой выполняются все аксиомы, кроме этой. Тем самым она, очевидно, не следует из других.

3. Система аксиом полная, если все ее реализации изоморфны.

Действительно, если они изоморфны, то нет такого, чтобы в одной реализации данное утверждение выполнялось, а в другой — нет. Если выполняется — значит, следует из аксиом, если не выполняется — значит, присоединение его ведет к противоречию. С другой стороны, если есть неизоморфные реализации (модели), то это значит, что есть хотя бы одно такое утверждение, которое в одной выполняется, в другой — нет. Тем самым ни оно, ни его отрицание аксиомам не противоречит.

Непротиворечивость обязательна: противоречивая система аксиом никак не реализуется и не имеет смысла. Независимость аксиом необязательна, но желательна, чтобы среди них не было лишних. Что же касается полноты, то полные системы аксиом представляют в математике исключение. Аксиомами определяют чаще всего не один объект, с точностью до изоморфизма, но обширный класс объектов, составляющих предмет соответствующей общей теории (см. § 32).

---

[1]) То, что B следует из аксиом A обычно понимают иначе: что B *выводится* из A. В математической логике систему аксиом называют «полной», если для всякого утверждения (в ее понятиях) *выводимо* либо это утверждение, либо его отрицание. При этом должны быть указаны допустимые правила вывода. Но, как следует из теоремы Гёделя, аксиоматика геометрии *в этом смысле* уже не является «полной».

§ 30. Числовая модель планиметрии

В аналитической геометрии геометрические соотношения выражаются алгебраически посредством координат. Тем самым в аналитической геометрии на плоскости, можно сказать, уже содержится числовая модель планиметрии; нужно только представить ее чисто алгебраически, дав для этого чисто алгебраические определения основных объектов и отношений планиметрии.

Итак, определяем.

Точкой назовем упорядоченную пару чисел (x, y). Эти числа назовем координатами точки. Точка обозначается ее координатами: (x, y), (a, b) и т. п.

Отрезком AB назовем множество точек (x, y), координаты которых представляются формулами

$$x = sx_A + tx_B, \quad y = sy_A + ty_B; \qquad s + t = 1, \quad s, t \geqslant 0. \qquad (1)$$

Точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ назовем концами отрезка. Точка (x, y) принадлежит отрезку, если x и y выражаются формулами (1).

Каждому отрезку AB относим число $|AB|$ — его «длину»:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \qquad (2)$$

Отрезки называем равными, если равны их длины.

Итак, основные объекты и отношения определены. Нужно убедиться, что все аксиомы планиметрии выполняются.

Для удобства выкладок и записи введем формальные векторы, понимая под этим упорядоченные пары чисел, и обозначая их $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ и т. п., так что, например, $\mathbf{x} = (x, y)$. От точек они отличаются тем, что для них мы определяем сложение и умножение на число и друг на друга.

(I) $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

(II) $\lambda\mathbf{x} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$; в частности, полагаем $(0, 0) = 0$ и $(-x, -y) = -(x, y)$.

(III) Произведение одного вектора на другой — это число

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

И, как обычно, пишем $(\mathbf{x}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 = x_1^2 + y_1^2$ и $\sqrt{\mathbf{x}^2} = |\mathbf{x}|$.

Пользуясь определениями (I) и (II), можно записать формулу, определяющую отрезок AB:

$$\mathbf{x} = s\mathbf{x}_A + t\mathbf{x}_B, \quad s, t \geqslant 0, \quad s + t = 1, \qquad (3)$$

или $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + t(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Длина отрезка запишется в виде

$$|AB| = \sqrt{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^2} = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|. \tag{4}$$

Вместо $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$ будем писать $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и т. п.

При любых $\mathbf{c}$ и $\mathbf{e}$ определим луч с началом в точке $\mathbf{c}$ «вдоль» ненулевого вектора $\mathbf{e}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\mathbf{e}, \tag{5}$$

где t пробегает любые неотрицательные значения, прямую определим тоже формулой (5), но при условии, что t пробегает все вещественные значения.

Часть луча, соответствующая какому угодно промежутку значений $t \in [t_0, t_1]$, представляет собой отрезок. Именно: полагая

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + t_0\mathbf{e}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} + t_1\mathbf{e},$$

получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\mathbf{e} = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\mathbf{a} + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\mathbf{b}, \tag{6}$$

или, обозначая коэффициенты при $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ через r и s,

$$\mathbf{x} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b},$$

где $r + s = 1$ и при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, будет $r, s \geqslant 0$, так что мы имеем отрезок с концами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Для того чтобы проверить, что в указанной числовой модели выполняются все аксиомы планиметрии, нужно то, что говорится в каждой аксиоме, перевести на язык модели — язык координат — и убедиться, что сказанное в аксиоме выполняется. Это не представляет затруднений, но несколько «нудно», если вести проверку с должной тщательностью; тщательность необходима ради общего принципа точности выводов, относящихся к аксиоматике или основанных на ней.

Проверка линейных аксиом.

1. Из принятого определения отрезка формулами (1) очевидно, что у всякого отрезка два и только два конца, и что для всяких двух точек существует отрезок с концами в этих точках. Так же очевидно, что на всяком отрезке есть точка, и что отрезки, равные одному и тому же отрезку, равны, раз у них по определению одна и та же длина. Проверить другие аксиомы более хлопотно, хотя и просто.

2. Проверим аксиому, что точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка.

Пусть дан отрезок

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{e}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

и $\mathbf{c}$ — точка на нем, так что

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + s_1\mathbf{e};$$

она делит его на два отрезка, соответствующих промежуткам $[0, s_1]$, $[s_1, 1]$. Представление этих отрезков получается из общей формулы (6): для одного $t_0 = 0$, $t_1 = s_1$, для другого $t_0 = s_1$, $t_1 = 1$.

3. По аксиоме соединения, если точка C на AB и B на CD, то объединение отрезков AB, CD представляет отрезок AD.

Пусть даны два отрезка AB и CD:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ \mathbf{x} = \mathbf{c} + s(\mathbf{d} - \mathbf{c}),\ 0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,$$

и пусть точка C лежит на AB, а B на CD, так что

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + t_1(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ \mathbf{b} = \mathbf{c} + s_1(\mathbf{d} - \mathbf{c}). \tag{7}$$

Из первого равенства (7)

$$\mathbf{b} - \mathbf{c} = (1 - t_1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Поэтому из второго равенства (7)

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}}{s_1} = \frac{1 - t_1}{s_1}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

В результате отрезок CD представляется (в силу первой формулы (7)) в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + s\frac{1 - t_1}{s_1}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \left(t_1 + s\frac{1 - t_1}{s_1}\right)(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Поэтому оба отрезка AB, CD представимы одной формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 + \frac{1 - t_1}{s_1}.$$

Значит, они представляют один отрезок AD; при $t \in [0, 1]$ $\mathbf{x}$ пробегает отрезок AB, при $t \in \left[t_1, t_1 + \dfrac{1 - t_1}{s_1}\right]$ $\mathbf{x}$ пробегает отрезок CD.

4. Проверим ту аксиому, что вдоль всякого отрезка от любого из его концов можно отложить отрезок, равный любому данному, и притом только один.

Пусть дан отрезок с концами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и некоторый отрезок длины l, который требуется отложить вдоль первого отрезка от его конца $\mathbf{a}$. Представим первый отрезок формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{c},\ \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a},\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Отрезок

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + tl\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

налегает на первый отрезок. Один его конец — $\mathbf{a}$, другой — $\mathbf{d} = \mathbf{a} + l\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$. Поэтому его длина будет

$$|\mathbf{d} - \mathbf{a}| = l\frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{c}|} = l,$$

что и требуется.

5. Проверим аксиому Архимеда. Пусть дан отрезок AB; его можно представить формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant l,$$

где l — длина отрезка AB. Поэтому параметр t — это длина отрезка от точки $\mathbf{a}$ до $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$.

Если дан еще отрезок длины l_1, то отложив его вдоль AB от конца A, получим, что при $l_1 \geqslant l$ он перекроет AB, если же $l_1 < l$, то останется отрезок с концами $\mathbf{a} + l_1\mathbf{e}$, $\mathbf{a} + l\mathbf{e}$. Его длина будет $l - l_1$. Откладывая на нем отрезок длины l_1 и т. д., придем к тому, что перекроем отрезок AB (на n-м шаге, где n такое, что $nl_1 \geqslant l > (n-1)l_1$), как того и требует аксиома Архимеда.

6. Проверим аксиому непрерывности. Последовательность вложенных один в другой отрезков можно представить так, что таким отрезкам будут отвечать промежутки значений параметра t, соответственно вложенные один в другой. По свойству вещественных чисел существует число t_0, принадлежащее всем этим промежуткам. Ему будет отвечать точка $\mathbf{a} + t_0\mathbf{e}$, общая всем данным отрезкам.

Проверка первой плоскостной аксиомы о делении плоскости. Согласно этой аксиоме по отношению к каждому отрезку на плоскости есть две стороны или, другими словами, каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Убедимся, что это выполняется.

Пусть дана прямая $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$, так что в координатах

$$x = a + tp, \quad y = b + tq, \tag{8}$$

где хотя бы одно из чисел p, q отлично от нуля, скажем, $p \neq 0$.

Координаты (8) удовлетворяют уравнению

$$qx - py + r = 0, \quad r = pb - qa. \tag{9}$$

Обратно: если x, y удовлетворяют этому уравнению, то они представимы в виде (8). Действительно, так как $p \neq 0$, то положив $t = \dfrac{x-a}{p}$, получим $x = a + tp$, и подставляя это в (9), найдем, что $y = b + tq$.

Теперь рассмотрим два неравенства

$$qx - py + r > 0, \quad qx - py + r < 0. \tag{10}$$

Покажем, что они задают полуплоскости, на которые данная прямая делит плоскость. Возьмем две точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). Координаты точек соединяющего их отрезка будут

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y = (1-t)y_1 + ty_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{11}$$

Пусть данные точки не принадлежат данной прямой (8), так что их координаты не удовлетворяют уравнению (9) и, стало быть, удовлетворяют тому или иному из неравенств (10).

Допустим, они удовлетворяют одному неравенству, скажем, первому, так что

$$qx_1 - py_1 + r > 0, \quad qx_2 - py_2 + r > 0.$$

Умножим левые части на $(1-t)$ и t и сложим. Тогда если $1 - t > 0$ и $t > 0$, то для точек с координатами (11) получим такое же неравенство

$$px + qy + r > 0.$$

Это значит, что отрезок (11) не пересекает прямую (8).

Если точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) удовлетворяют разным неравенствам (10), то при переходе от одного к другому по отрезку их левая часть должна обратиться в нуль, т. е. отрезок пересечет прямую. Это можно представить явно, не ссылаясь на это соображение непрерывности. Пусть, например,

$$qx_1 - py_1 + r > 0, \quad qx_2 - py_2 + r < 0, \tag{12}$$

Если x, y выражаются формулами (11), то

$$qx-py+r=(qx_1-py_1+r)(1-t)+(qx_2-py_2+r)t.$$

Приравнивая нулю, находим то $t=t_0$, при котором x, y удовлетворяют уравнению прямой (8):

$$t_0=\frac{qx_1-py_1+r}{(qx_1-py_1+r)-(qx_2-py_2+r)}.$$

Вследствие (12) $0<t_0<1$. Тем самым точка отрезка, соответствующая $t=t_0$, лежит на прямой (8).

Проверка аксиомы откладывания угла. Аксиома откладывания угла разлагается, как показано в § 9, на две: первая ее «половина» — это аксиома построения треугольника.

Пусть даны треугольник $A_0B_0C_0$, отрезок AB, равный A_0B_0, и указана одна сторона от этого отрезка. Существует такой треугольник ABC, что вершина C лежит по данную сторону от AB и $AC=A_0C_0$, $BC=B_0C_0$.

Докажем, что в нашей модели это выполняется.

Пусть дан треугольник $A_0B_0C_0$, причем

$$|A_0B_0|=a,\quad |A_0C_0|=b,\quad |B_0C_0|=c.$$

Пусть a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y — разности координат концов отрезков AB, AC, BC (последние два отрезка нужно найти):

$$a_x=x_B-x_A,\quad b_x=x_C-x_A,\quad c_x=x_C-x_B \tag{13}$$

и аналогично $a_y=y_B-y_A$ и т. п.

Непосредственно проверяется, что

$$c^2=a^2+b^2-2\mathbf{ab},$$

где $\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y$, и поэтому

$$\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2). \tag{14}$$

Кроме того,

$$b^2=b_x^2+b_y^2. \tag{15}$$

Формулы (14), (15) представляют уравнения для b_x, b_y: из них выводится квадратное уравнение для b_x, и поэтому возможны не более двух решений и, соответственно, не более двух значений координат точки C: $x_C=b_x+x_A$ и $y_C=b_x+y_A$. Решение уравнений (14), (15) даст

$$x_C = \frac{(ab)\,a_x \pm a_y\sqrt{a^2b^2-(ab)^2}}{a^2} + x_A;$$
$$y_C = \frac{(ab)\,a_y \pm a_x\sqrt{a^2b^2-(ab)^2}}{a^2} + y_A. \qquad (16)$$

То, что разности $x_C - x_A = b_x$, $y_C - y_A = b_y$ удовлетворяют уравнениям (14), (15), проверяется непосредственно, так что отрезок AC имеет нужную длину $|b|$. Также из (16) проверяется, что сторона BC имеет данную длину $|c|$ (если учесть, что $c^2 = c_x^2 + c_y^2$ и $c_x = x_C - x_B = b_x - a_x$ и также $c_y = b_y - a_y$).

Так как $a^2b^2 > (\mathbf{ab})^2$, то координаты x_C, y_C существуют и, значит, существует вершина $C(x_C, y_C)$. Формулы (16) дают две пары значений координат x_C, y_C точки C (если в первой формуле берется плюс, то во второй — минус, и наоборот). Это значит, что имеются два треугольника ABC. У одного вершина C лежит с одной стороны от AB, у другого — с другой. Это проверяется так же, как была проверена аксиома деления плоскости.

Итак, первая часть аксиомы откладывания угла выполняется.

Докажем, что выполняется и вторая ее часть; она гласит: пусть $AB = A_0B_0$, $AC = A_0C_0$, $BC = B_0C_0$ и отрезки $AB' = A_0B_0'$, $AC' = A_0C_0'$ налегают соответственно на AB, A_0B_0, AC, A_0C_0, причем $AB' = A_0'B_0'$, $AC' = A_0'C_0'$. Тогда также $B'C' = B_0'C_0'$.

Пусть $\mathbf{x}_A$ — вектор точки A. Отрезок AB представляется формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + t\mathbf{a}.$$

Отрезок AB', налегающий на AB, представим той же формулой только с другим промежутком изменения t. Это, очевидно, равносильно тому, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + s\mathbf{a}', \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

где $\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}$ с некоторым λ.

Аналогично для отрезка AC':

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + s\mathbf{b}', \quad \mathbf{b}' = \mu\mathbf{b}.$$

Точно так же для отрезков A_0B_0' и A_0C_0', $\mathbf{a}_0' = \lambda \mathbf{a}_0'$, $\mathbf{b}_0' = \mu \mathbf{b}_0'$. Итак,

$$\mathbf{a}' = \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mu \mathbf{b}; \qquad \mathbf{a}_0' = \lambda \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_0' = \mu \mathbf{b}_0.$$

При этом для отрезков BC и B_0C_0

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' - \mathbf{b}' = \lambda \mathbf{a} - \mu \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_0' = \mathbf{a}_0' - \mathbf{b}_0' = \lambda \mathbf{a}_0 - \mu \mathbf{b}_0.$$

Поэтому квадраты длин отрезков BC, B_0C_0 будут

$$\mathbf{c}'^2 = \lambda^2 \mathbf{a}^2 + \mu^2 \mathbf{b}^2 - 2\lambda\mu (\mathbf{a}\mathbf{b}), \quad \mathbf{c}_0'^2 = \lambda^2 \mathbf{a}_0^2 + \mu^2 \mathbf{b}_0^2 - 2\lambda\mu (\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0). \tag{17}$$

Длины отрезков AB, AC, BC и A_0B_0, A_0C_0, B_0C_0 соответственно равны, так что

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_0^2, \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_0^2, \quad \mathbf{c}^2 = \mathbf{c}_0^2.$$

А так как

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2), \quad \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_0^2 + \mathbf{b}_0^2 - \mathbf{c}_0^2),$$

то также $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$.

Поэтому из (17) $\mathbf{c}'^2 = \mathbf{c}_0^2$, т. е. длины BC и B_0C_0 равны, что и требовалось доказать.

Проверка аксиомы параллельных. Как показано выше, прямая представляется линейным уравнением (9), которое можно написать в виде $px + qy + r = 0$. Если точка (x_0, y_0) лежит на прямой, то $px_0 + qy_0 + r = 0$, и, вычитая, получаем уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0):

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0. \tag{18}$$

Очевидно, здесь p и q можно умножить на любое число, отличное от нуля.

Пусть дана прямая a с уравнением

$$p_0x + q_0y + r = 0.$$

Пусть дана точка (x_0, y_0); любая проходящая через нее прямая представляется уравнением вида (18).

Два линейных уравнения не имеют единственного общего решения только в том случае, когда

$$pq_0 - qp_0 = 0,$$

т. е. когда p, q пропорциональны p_0, q_0. Тогда в этом случае прямая (18) не пересекает прямую a.

Это означает, что через точку (x_0, y_0) проходит единственная прямая, не пересекающая a, как и требует аксиома параллельности.

§ 31. Величина

Понятие величины является основным в точном естествознании; подавляющее большинство законов физики говорит о зависимостях между теми или иными величинами. Простейшая из величин — это длина; из практики она вошла в геометрию. Как понятно каждому, длина обладает следующими свойствами, которые мы сформулируем на интуитивном уровне без строгости.

1. Длины можно складывать (длины складываются, когда один отрезок прикладывается к другому).

2. Если к данной длине прибавляется еще длина, то получается бо́льшая длина.

3. Результат сложения — сумма длин — не зависит ни от порядка сложения, ни от того как объединяются слагаемые (коммутативность и ассоциативность).

4. Длина может непрерывно изменяться.

Эти свойства длины, если их выразить точно в общем виде как аксиомы, дают аксиоматическое определение общего понятия величины (или, уточняя,— аддитивной положительной скалярной величины; «аддитивной» потому, что для нее определено сложение[1]), «скалярной» — чтобы отличить от векторных величин).

Аксиоматическое определение величины. Величиной называется элемент множества (совокупности) «однородных величин», в котором определена операция, называемая сложением, и выполняются следующие ее свойства (операция обозначается знаком $+$).

I. «Аксиома сложения».

I.1. *Для каждых двух величин a, b существует такая однозначно определенная величина c, что $c = a + b$ (иначе говоря, операция сложения сопоставляет каждой паре величин a, b определенную величину c — «их сумму»).*

[1]) Есть величины, для которых сложение не определено, например температура. Прибавляют не температуру, а количество тепла. Электрический заряд — величина, которая бывает и положительной и отрицательной.

I.2. $a+b=b+a$.

I.3. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

II. Аксиома неравенства.

II. *Для каждых двух величин a, b верно одно из трех:* либо 1) $a=b$; либо 2) *существует такая однозначно определенная величина c, что* $a=b+c$, либо наоборот: 3) *существует такая величина d, что $b=a+d$.*

В случае 2) говорят, что a больше b: $a>b$; в случае 3) $b>a$. (Это вполне соответствует обыденному понятию: больше та величина, которая получается, когда к данной прибавляют.)

Когда $a=b+c$, то полагают также $c=a-b$, т. е. если $a>b$, то существует однозначно определенная величина — разность $c=a-b$.

III. Аксиомы непрерывности.

III.1. *Для всякой величины есть меньшая.*

III.2. *Всякая ограниченная сверху последовательность величин имеет точную верхнюю границу*, т. е. если для последовательности величин a_1, a_2, a_3, ... есть такая c, что все $a_n \leqslant c$, то либо среди величин a_n есть наибольшая, либо существует такая величина a, что все $a_n<a$ и при всякой величине b найдется такое n, что $a<a_n+b$ (или, что то же, $a-a_n<b$).

Последнюю аксиому можно заменить двумя — аксиомой Архимеда и аксиомой непрерывности, аналогичной аксиоме непрерывности в нашей аксиоматике геометрии.

III.2а (Аксиома Архимеда). *Для любых двух величин a, b найдется такое натуральное n, что* $a<nb=\underbrace{b+\ldots+b}_{n\text{ раз}}$.

III.2б. *Для двух последовательностей величин* $a_1<a_2<a_3<\ldots<b_3<b_2<b_1$ *всегда существует такая величина c, которая больше всех a_n и меньше всех b_n.*

Достоинство аксиомы III.2 о точной верхней границе не только в том, что она одна за две — III.2а и III.2б. Оказывается, если аксиому III.1 заменить на противоположную, что среди величин существует наименьшая, то получим определение дискретной величины, измеряемой натуральными числами, как численность совокупности предметов.

Можно придать данному определению величины форму аксиоматики величины; основные ее объекты — величины, основное отношение — это отношение слагаемых к сумме.

Выполняется следующая важнейшая теорема.

Теорема (об измерении величин). *Величинам (любого данного типа) можно взаимно однозначно сопоставить положительные числа так, что суммам величин будут отвечать суммы чисел. Такое соответствие однозначно определяется выбором той величины e, которой сопоставляется число* 1.

Такое сопоставление чисел величинам называется измерением, а величина e — единицей измерения.

Доказательство этой теоремы представляет собой простой пересказ доказательства теорем о численной длине в § 15.

В планиметрии есть три величины: длина, угол (как величина) и площадь. Им можно дать следующие определения, совершенно сходных друг с другом.

Длиной отрезка называется величина, отнесенная отрезкам так, что выполнены два условия:

1. У равных отрезков длина одна и та же.
2. Если отрезок a составлен из отрезков a_1 и a_2, то его длина равна сумме их длин.

Площадью фигуры, составленной из многоугольников, называется величина, относимая таким фигурам с двумя условиями:

1. У равных фигур площадь одна и та же.
2. Если фигура F составлена из двух фигур F_1, F_2 (т. е. служит их объединением, но эти фигуры не имеют общих внутренних точек), то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1, F_2. (Определение площади для не многоугольных фигур сложнее и будет дано в гл. 8.)

Величиной угла называется величина, относимая углам так, что выполнены два условия:

1. У равных углов величина одна и та же.
2. Если угол α составлен из углов α_1, α_2, то его величина равна сумме их величин.

Следует оговорить, что величина угла — это величина, «с ограничением»: она не может быть больше величины развернутого угла или, при другом взгляде, больше двух развернутых углов. Поэтому здесь аксиомы сложения должны быть дополнены: существует такая величина d, что сумма $a + b$ определена лишь тогда, когда $a \leqslant 2d - b$, где $2d$ — величина развернутого угла.

Величины всегда относятся к каким-либо объектам, как «величина объекта данного класса», как длина, относящаяся к отрезкам (или вообще — к кривым), площадь к многоугольникам или общим фигурам с внутренностью; как в обыденной жизни и в физике масса относится к телам и т. п. Величина — это свойство объекта данного класса.

Понятие о величинах объектов данного класса возникает из сравнения и определения равенства объектов по величине. Это первый важнейший шаг в определении величин (притом не только аддитивных, а любых); он начинается с операции сравнения, как прикладывание тел друг к другу, уравновешивание на весах и др. В результате во всем классе объектов определяются подклассы объектов одной и той же величины — с одним и тем же свойством, или, другими словами, равных по данной величине, как говорят о предметах: «равные по длине», «равные по массе», «по площади» и т. п.

Равенство по величине, как и всякое совпадение свойства, рефлексивно, симметрично и транзитивно. В самом деле, у предмета есть определенное свойство — определенная величина, так что он в том смысле «равен самому себе», т. е. отношение равенства по величине рефлексивно. Далее, если предмет A имеет то же свойство — ту же величину, что B, то тем самым B имеет то же свойство, что A, т. е. отношение симметрично. Наконец, если у A то же свойство, что у B, а у B — то же, что у C, то тем самым у A то же свойство, что у C, т. е. отношение совпадения свойств (в частности, величин) транзитивно. Ввиду этого вообще рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называется отношением эквивалентности.

Наличие у объектов какого-либо рефлексивного симметричного транзитивного отношения R определяет их распределение по классам — по подмножествам «эквивалентности».

Действительно, сопоставим каждому объекту A все объекты, находящиеся к нему в данном отношении R. Они образуют класс $K(A)$. Такой класс не пустой: ему принадлежит, по крайней мере, сам объект A, потому что по рефлексивности он находится в отношении R сам к себе.

Покажем, что любые два такие класса $K(A)$, $K(B)$ либо совпадают, либо не имеют общих объектов.

Действительно, пусть $X \in K(B)$ и вместе с тем $X \in K(A)$. Первое означает, что XRB: X находится в отношении R к B и по симметрии BRX. Второе означает, что

XRA. Итак, BRX, XRA и, стало быть, по транзитивности BRA. Возьмем теперь любой объект $Y \in K(B)$, так что YRB. Так как BRA, то по транзитивности YRA, т. е. $Y \in K(A)$.

Итак, любой объект из класса $K(B)$ принадлежит $K(A)$. А так как классы играют здесь одинаковую роль — у них есть общий объект X, то точно так же, каждый объект из $K(A)$ принадлежит $K(B)$. Следовательно, классы $K(A)$, $K(B)$ совпадают.

Таким образом, классы либо совпадают, либо не имеют общих объектов: рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение определяет распределение объектов по таким классам, что и требовалось доказать.

Верно и обратное. Пусть какие-то объекты распределены по каким-то классам. Определим отношение R между этими объектами, считая, что ARB, т. е. A находится в отношении R к B, если A находится в том же классе, где B. Легко убедиться, что это отношение будет рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Как мы видели, сравнение объектов по какому-либо свойству, по величине определяет между ними отношение эквивалентности (по этому свойству, по величине). Обратно, наличие рефлексивного, симметричного, транзитивного отношения означает наличие общего свойства, хотя бы в смысле принадлежности одному и тому же классу. Но, как правило, за этим стоит более глубокое свойство — то общее, что есть у объектов одного класса.

Отношение подобия фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно. И у подобных фигур есть общее свойство — их форма.

Обмен товаров устанавливает между ними рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение (если A обменивается на B, а B — на C, то и A обменивается на C). Тем самым в обмене обнаруживается общее свойство товаров — это их стоимость.

Определение равенства позволяет дальше вводить сравнение.

Величиной в общем смысле называется свойство, которое в каком-то отношении может быть больше или меньше и притом так, что позволяет точное сравнение, называемое измерением. Поэтому говорят, что величина — это то, что можно измерить. Сложение определяется не для любых величин. Но в математике имеют в виду только аддитивные величины.

§ 32. Аксиоматический метод. Понятие группы, метрического и топологического пространств

Аксиоматический метод можно в общем виде определить как «способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом»[1]). Соответственно, аксиоматический метод дает способ определения предмета научной теории: предмет ее — это то, о чем говорится в аксиомах (о таком взгляде мы уже говорили, характеризуя абстрактное понимание аксиоматики геометрии). Такое аксиоматическое определение предмета разных математических теорий является уже достаточно давно самым употребительным. Приведем три примера, тесно связанных с основаниями геометрии,— это понятия группы, метрического пространства и топологического пространства.

1. Говорят, что некоторые «элементы» образуют *группу*, если для них определена, как принято говорить, «операция», сопоставляющая каждой упорядоченной паре элементов a, b один элемент (обозначаемый ab) — их «произведение», причем выполнены следующие аксиомы — «аксиомы группы».

I_1. $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность умножения).

I_2. *Существует такой элемент* e — *«единица группы», что* $ea=ae=a$ *для всякого элемента* a.

I_3. *Для каждого элемента* a *существует такой элемент* a^{-1} — *«обратный элемент» — что* $a^{-1}a=aa^{-1}=e$. (Доказывается, что единица единственная и обратный элемент для каждого данного a единственный.)

Если, как принято, пользоваться общим понятием множества, то можно дать определение.

Группой называется множество элементов, в котором определена операция: $(a, b)\to ab$ *так, что выполняются сформулированные аксиомы* I_1—I_3.

Какие у группы элементы, какова их природа, как их пары связываются с «произведением» — не имеет никакого значения: ничего кроме сказанного в аксиомах здесь

---

[1]) Это определение дано в «Математической энциклопедии» (1977 г., т. I, с. 110) П. С. Новиковым, крупнейшим нашим ученым в области математической логики.

не нужно. В таком понимании, когда оно только выявилось, группы называли «абстрактными» в отличие от «конкретных» групп, какие образуют элементы определенной природы. Примерами могут служить группы целых чисел с операцией сложения, вещественных чисел без нуля с операцией умножения и др.

Важнейшую роль в геометрии играют группы преобразований. Элементами такой группы служат взаимно однозначные отображения какого-либо множества на себя; умножение элементов — это последовательное осуществление таких отображений. Единицей служит тождественное отображение, а обратным элементом — отображение, обратное данному[1]). Умножение элементов — преобразований называют также их композицией.

Примеры групп геометрических преобразований представляют:

— вращения правильного многоугольника вокруг центра, совмещающие его самого с собой;

— те же вращения с присоединением отражений в прямых (группа вращений является подгруппой этой);

— параллельные переносы плоскости;

— любые перемещения плоскости;

— в пространстве — перемещения, совмещающие самого с собой фиксированный правильный многогранник и др.

Для умножения (композиции) преобразований ассоциативный закон выполняется автоматически.

Поэтому для того, чтобы совокупность отображений какого-либо множества на себя образовывала группу, достаточно, чтобы вместе с каждыми двумя содержащимися в ней отображениями она содержала их произведение (композицию) и вместе с каждым отображением — обратное ему[1]). Тогда тут будет и тождественное преобразование e (как произведение любого данного преобразования на ему обратное).

Аксиоматику группы можно представить в виде, стандартном для абстрактно понимаемой аксиоматики, введя сначала основные объекты и отношения. Объекты — «элементы»; отношение — это отношение упорядоченной пары

---

[1]) Если отображаемое множество M конечное, то его преобразования называют подстановками: можно считать, что M — это множество чисел 1, 2, ..., n. Подстановка записывается так: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, где a_i — все числа 1, 2, ..., n в каком-то порядке.

к произведению. Аксиомы при этом формулируются начиная со следующей.

I_0. *Для каждой упорядоченной пары элементов существует и притом единственный элемент, являющийся их произведением.*

За этим следуют уже сформулированные аксиомы I_1—I_3 [1]).

Согласно общему понятию изоморфизма две группы называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между их элементами, при котором произведению соответствует произведение, т. е. если $ab=c$ в группе G и в G' элементам a, b, c отвечают a', b', c', то $a'b'=c'$. И обратно: если $p'q'=r'$ в G' и элементам p', q', r' отвечают в G элементы p, q, r, то $pq=r$.

Первый пример изоморфных систем, приведенный в § 29, представляют две изоморфные группы. Одна — это группа из двух чисел 1, —1 с операцией умножения, другая — группа, состоящая из отражения плоскости в прямой и тождественного отображения. Еще пример: группа чисел с операцией сложения изоморфна группе положительных чисел с операцией умножения. Изоморфные группы представляют одну и ту же абстрактную группу.

Аксиоматика группы, очевидно, не полная, поскольку существуют неизоморфные группы.

2. *Метрическим пространством* называется множество каких-либо элементов, называемых «точками», каждой паре (x, y) которых сопоставлено вещественное число $\rho(x, y)$ такое, что выполнены условия — «аксиомы метрического пространства».

M_1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$.

M_2. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

M_3. $\rho(x, y)+\rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* от x до y, функция ρ переменных x, y называется *метрикой*.

Примеры метрических пространств представляют плоскость, прямая, пространство (в евклидовой геометрии) с обычным расстоянием между точками, если эти рас-

---

[1]) Аксиомы I_2, I_3 можно ослабить, требуя существования только «правых» — единицы и обратного элемента, т. е. таких, что: $ae=a$, $aa^{-1}=e$ (можно требовать только «левых»: $ea=a$, $a^{-1}a=e$).

стояния выражены числами, т. е. если выбрана единица длины. Любая фигура на плоскости (или в пространстве) с обычными расстояниями между точками тоже представляет метрическое пространство.

В метрическом пространстве шаром с центром a и радиусом $r>0$ называется множество таких точек x, для которых $\rho(a, x)\leqslant r$, т. е. определение шара здесь буквально такое же, как в элементарной геометрии. «Шар» на плоскости — это круг.

Аксиоматику метрического пространства можно представить в стандартном виде. Основные объекты ее — это точки и расстояния, основное отношение — точки x, y находятся на расстоянии d одна от другой. Тогда аксиомы формулируются так

M_0. *Расстояние есть вещественное число. Каждый упорядоченной паре точек x, y отвечает определенное расстояние $\rho(x, y)$ от x до y.*

Дальше следуют сформулированные аксиомы M_1—M_3.

Важный в геометрии пример метрического пространства представляет всякая область на плоскости или, вообще, на поверхности, где расстояние $\rho(x, y)$ между точками определяется так: $\rho(x, y)$ — это точная нижняя граница длин кривых, соединяющих точки x, y и расположенных в данной области или на поверхности. Легко убедиться, что аксиомы M_1—M_3 здесь выполняются, если только предположить, что поверхность такая, что две любые ее точки соединяются на ней кривой конечной длины.

Так определенная метрика на поверхности называется ее внутренней метрикой.

Вне геометрии понятие расстояния играет важнейшую роль в функциональном анализе, где определяют тем или иным способом расстояния между функциями. В простейшем случае для непрерывных функций f, g на промежутке $[a, b]$ полагают

$$\rho(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. *Топологическим пространством* называется множество элементов, называемых точками, в котором выделены подмножества, называемые открытыми, так что выполнены аксиомы:

T_1. *Объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество.*

T_2. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

T_3. *Само данное множество — открытое.*

T_4. *Пустое множество — открытое.*

Здесь основные объекты — точки и открытые множества, а основное отношение — точка принадлежит открытому множеству. Если в некотором множестве M выделены подмножества с аксиомами T_1—T_4, т. е. открытые, то говорят, что этим на M задается топология.

В § 24 были определены открытые множества на плоскости: множество открыто, если оно содержит вместе с любой своей точкой и какой-нибудь круг с центром в ней. Нетрудно проверить, что для таких множеств выполняются аксиомы T_1—T_4. Тем самым, определив их как открытые в смысле определения из § 24, мы задаем на плоскости топологию — превращаем ее в топологическое пространство.

Точно так же в любом метрическом пространстве множество считается открытым, если оно вместе с любой своей точкой содержит какой-нибудь шар с центром в этой точке. Этим во всяком метрическом пространстве определяется топология, называемая метрической. Определение открытых множеств и, тем самым, топологии на плоскости является здесь частным случаем.

Когда в пространстве определены открытые множества, окрестностью точки, вообще, называют любое содержащее ее открытое множество или, шире,— множество, содержащее такое открытое.

Далее в любом топологическом пространстве определяется граница и внутренность аналогично тому, как это было сделано на плоскости. Точка называется граничной для множества M, если во всякой ее окрестности есть точки, как принадлежащие M, так и не принадлежащие M. Точка множества M называется внутренней, если она не граничная, так что у нее есть окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество граничных точек множества называется его границей, а множество внутренних точек — его внутренностью. Множество, содержащее свою границу, называется замкнутым (в противоположность открытому, которое, как ясно из определения, не содержит ни одной своей граничной точки).

Отметим еще два важных понятия. Отображение f одного топологического пространства R в другое R_1 (или в то же самое R), называется непрерывным в точке x, если для всякой окрестности V точки $y=f(x)$ в R_1, найдется такая окрестность U точки x, что $f(U)\subset V$, т. е. U отображается в V. Отображение, непрерывное в каждой точке пространства R, называется просто непрерывным.

Всякое подмножество N топологического пространства R оказывается топологическим пространством — подпространством пространства R в силу следующего определения: множество $M\subset N$ считается открытым, если в R существует такое открытое G, что $N=M\cap G$. Ввиду этого данное только что определение непрерывного отображения относится к отображениям любого подмножества топологического пространства.

Топология — это часть математики, которая изучает топологическое пространство, фигуры (множества) в них и их отображения. Это означает, в частности, что она изучает фигуры на плоскости или в евклидовом пространстве, но только с точки зрения их топологических свойств, т. е. тех, которые определяются имеющимися там открытыми множествами.

Изложенная здесь аксиоматика топологического пространства с основным понятием открытого множества — не единственная; применяются и другие, равносильные аксиоматики с другими основными понятиями (как замкнутые множества, замыкание, окрестность, точка прикосновения).

ГЛАВА 6
РАЗНЫЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ

§ 33. Чем могут различаться системы аксиом

Системы аксиом, которые кладутся в основания как геометрии, так и других теорий, могут различаться в целом ряде отношений.

1. Самое простое — это различия «по форме», когда системы аксиом отличаются только формулировками и компоновкой аксиом: какие аксиомы соединяются вместе и какие разделяются, так что на самом деле это не разные, а одна система аксиом, только выраженная несколько разными способами. Простейший случай — это перефразировка аксиом. Так, например, можно сказать: «любые две точки соединимы отрезком» или «для любых двух точек существует отрезок, концами которого они служат».

Аксиомы можно соединить вместе или, напротив, разделить. Так, например, мы формулировали аксиому: «любые две точки соединимы отрезком и притом только одним». Но это можно разделить: отделить первую часть и потом в качестве отдельной аксиомы высказать: «две точки могут быть концами только одного отрезка», или «для любых двух точек существует не более одного отрезка, концами которого они служат».

В системе аксиом Гильберта[1]) формулируется как одна аксиома: «Каждой прямой принадлежит по крайней мере две точки. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой».

Между тем очевидно, что это — две разные аксиомы. Зато у Гильберта разделены аксиомы: 1) через две точки проходит прямая и 2) существует не более одной прямой, проходящей через две данные точки.

Вообще, можно считать, что соединение близких аксиом или их разделение — дело вкуса.

Соединять разные утверждения посредством союза «и» или просто ставя их рядом через точку или точку с за-

---

[1]) Гильберт Д. Основания геометрии.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.

пятой не составляет труда. Так можно сокращать число аксиом. Но действительно принципиальная позиция состоит в том, чтобы разделить все аксиомы, какие только можно, не допуская никаких их соединений. Между прочим, так и только так можно сравнивать разные системы аксиом по числу содержащихся в них аксиом.

Аксиомы можно по-разному делить на группы, как это было сделано для нашей системы аксиом в § 8 гл. 2. Кроме того, в § 9 аксиома откладывания угла была разделена на две аксиомы.

2. Более существенным является различие «по аксиомам», т. е. такое, когда системы аксиом отличаются хотя бы некоторыми входящими в них аксиомами по содержанию, а не просто по форме выражения. Так, например, получается, когда наша аксиома параллельных отрезков заменяется аксиомой параллельных прямых или аксиома деления плоскости в первоначальной формулировке заменяется на аксиому, что прямая разбивает плоскость на две выпуклые фигуры (как указано в § 22).

3. Вариант различия «по аксиомам» представляет случай, когда системы аксиом отличаются «силой» условий, в крайнем случае, когда в одной системе есть аксиома, выводимая из других, так что заключенное в ней условие — лишнее и такую аксиому можно исключить. Если таких аксиом нет, то говорят, что аксиомы независимы. В основаниях теории всегда стремятся к независимости аксиом; наличие зависимых аксиом считается несовершенством аксиоматики.

Более тонкое различие может состоять в том, что аксиомы независимы, но тем не менее одну или несколько из них можно ослабить, как в § 9 были указаны две аксиомы, вместе более слабые, чем аксиома откладывания угла. Еще важный пример: вместо аксиомы параллельных прямых достаточно требовать, чтобы сказанное в ней выполнялось хотя бы для одной прямой и одной точки, т. е. аксиому можно заменить такой: существуют такая прямая a и такая не лежащая на ней точка A, что через эту точку проходит не более одной прямой, параллельной a. Аналогично можно ослабить нашу аксиому параллельных отрезков и некоторые другие. Такой вариант нашей системы аксиом мы сформулируем дальше, в § 34.

4. Существенное различие систем аксиом совсем в другом отношении представляет различие по основным понятиям, т. е. когда в системах аксиом в качестве основ-

ных приняты разные понятия. Так у нас в системе аксиом, изложенной в гл. 2, основными объектами служат отрезки, тогда как обычно основными объектами служат прямые; соответственно, изменяются и основные отношения; вводятся отношения: точка принадлежит прямой, одна точка лежит между двумя другими, отношение точек к отрезкам автоматически исключается из основных отношений. Естественно, вместе с изменением основных понятий изменяются и аксиомы (примеры излагаются дальше, в § 35, 36).

5. Очень существенное отличие одной системы аксиом от другой может заключаться в том, какие понятия считаются в ней известными. Например, когда формулируют аксиому, что прямая есть множество точек, то подразумевают, что понятие множества известно. Так же, если в аксиомы вводят понятие о длине отрезка, выражаемой числом, то понятие вещественного числа считается известным. Оба случая представлены аксиомами, принятыми в школьных учебниках: в учебнике под редакцией А. Н. Колмогорова и в учебнике А. В. Погорелова[1]. В первом аксиомы содержат понятие множества и в обоих учебниках в аксиомы входят понятие о расстоянии между точками или, что то же, о длине отрезка, которая определяется как вещественное число. (В первых изданиях учебника под редакцией А. Н. Колмогорова в аксиомы входило понятие величины: расстояние определялось как величина[2])).

Конечно, во всякой аксиоматике что-то подразумевается известным; минимально — это понятие грамматики и логики, а также натуральные числа. Во всяком случае, без грамматики и логики ничего нельзя сформулировать. Как нельзя, например, высказать аксиому о проведении отрезка без слова «существует» или без равносильного выражения. Иное дело, если в системе аксиом используется какое-либо понятие из другой теории, без которого можно обойтись при другом изложении аксиом. Если таких «не неизбежных» понятий в аксиоматике нет, ее можно назвать замкнутой; когда же они есть, она «не замкнута», так как для ее понимания нужно знать еще что-то, ле-

---

[1]) Колмогоров А. Н., Семенович А. С., Черкасов Р. С. Геометрия 6—8.— М.: Просвещение, 1982. Погорелов А. В. Геометрия 6—10.— М.: Просвещение, 1983.

[2]) Первая точная аксиоматика геометрии, в которой расстояние определялось как число, была введен В. Ф. Каганом в 1904 г.

жащее вне ее предмета. Наша система аксиом, изложенная в гл. 2, замкнута; в частности, ни понятия множества, ни вещественного числа для ее понимания вовсе не требуется.

Если в аксиомах используется, скажем, понятие вещественного числа, то тем самым полное раскрытие содержания аксиом должно включать определение этого понятия, т. е. при строго аксиоматическом изложении дóлжно включить определяющие его аксиомы. Без этого система аксиом не будет завершенной или, как мы говорим, замкнутой; она требует очень большого дополнения, так как аксиоматическое определение вещественного числа содержит много аксиом (до 18 аксиом).

Понятие множества настолько укоренилось в самих основах математики, что его появление в аксиоматике можно не считать нарушением ее замкнутости. Можно сказать, включающая его аксиоматика замкнута в рамках теоретико-множественной точки зрения. У теории множеств есть свои аксиомы, и если иметь это в виду, то аксиоматику, использующую понятие множества, нельзя считать замкнутой. Однако в элементарной геометрии аксиоматизированное понятие множества в полном объеме вовсе не нужно. Достаточно того, что требуют аксиомы фигуры, сформулированные в § 11.

З а м е ч а н и е. Может возникнуть замечание, что понятие натурального числа, понятие последовательности натуральных чисел тоже требуют аксиоматического определения и что поэтому между системой аксиом, включающей эти понятия и включающей понятие множества, нет принципиальной разницы. Однако последовательность натуральных чисел можно представлять в ее последовательном построении, которое интуитивно ясно без всяких аксиом. Кроме того, аксиому непрерывности, где только и фигурирует последовательность натуральных чисел, можно заменить другой.

Пусть точки отрезка AB распределены между двумя фигурами F, G так, что если $M \in F$ и $N \in G$, то $AM \subset$ $\subset AN$. Тогда одна из фигур F, G представляет собой отрезок.

6. В дополнение ко всему сказанному заметим, что принципиальное различие систем аксиом можно видеть в уровне абстракции, на котором понимаются и формулируются аксиомы. В предыдущей главе и говорилось о различии в понимании — наглядно-содержательном или

отвлеченном — одной и той же аксиоматики. Но при таком различном понимании можно считать, что тут не одна и та же аксиоматика по ее содержанию.

Самый «высокий» уровень абстракции достигается тогда, когда аксиомы толкуются совершенно формально и отвлеченно от всякого мыслимого их содержания, так что их можно записать «логическими формулами» или «машинным языком» и передать машине, чтобы она извлекла из них выводы. Пока мы только указываем такую возможность, а рассмотрим ее несколько подробнее дальше.

§ 34. Вариант системы аксиом планиметрии

Здесь мы дадим систему аксиом планиметрии, представляющую собой усовершенствованный вариант той системы, которая была изложена в гл. 2. Усовершенствование состоит, во-первых, в разделении аксиом на такие, которые уже неделимы, и в более строгих формулировках, а во-вторых, в замене некоторых аксиом существенно более слабыми.

Основные понятия остаются те же — объекты: точки и отрезки; отношения: точка есть конец отрезка, точка лежит на отрезке, два отрезка равны друг другу.

Принимаем определение: точка принадлежит отрезку, если она лежит на нем или является его концом. В связи с этим для отрезков применяются обычные обозначения для включения, объединения и пересечения множеств. Равенство отрезков обозначается, как и раньше, обычным знаком равенства. Кроме того, мы пользуемся понятием, что один отрезок пересекает другой; понятием треугольника как совокупности трех отрезков, как это понятие было определено в § 9.

Линейные аксиомы. I. Аксиомы связи точек и отрезков. Первые четыре аксиомы касаются связи отрезков и концов.

I_1. *Для каждого отрезка существуют две точки, являющиеся его концами.*

I_2. *Для каждого отрезка существует не более двух точек, являющихся его концами.*

I_3. *Для каждых двух точек существует отрезок, концами которого они являются.*

I_4. *Существует не более одного отрезка с данными концами.*

Аксиомы I_1, I_2, I_4 дают основание к тому, чтобы обозначить отрезок его концами AB, CD и т. п. Следующие две аксиомы говорят о точках на отрезке.

I_5. *Для каждого отрезка существует лежащая на нем точка.*

I_6. *Точка, лежащая на отрезке, не является его концом.*

Среди аксиом I_1—I_6 нет аксиомы, утверждающей существование точек и отрезков самих по себе (оно включается дальше в первую плоскостную аксиому). Поэтому из этих аксиом выводы, сделанные в гл. 3, вытекают условно: «если есть отрезки, то»...

II. Аксиомы разделения и соединения отрезков. Первые две аксиомы выражают, что точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка.

II_1. *Если точка C лежит на отрезке AB, то $AB = AC \cup BC$*[1].

II_2. *Если C на AB, то $AC \cap BC = C$.*

II_3. *Если C на AB и B на CD, то $AB \cup CD = AD$.*

III. Аксиомы о равенстве и сравнении отрезков. В этих аксиомах мы только разделяем прежнюю аксиому откладывания отрезка на две. Причем, как и прежде, мы говорим, что отрезок AC налегает на AB, если $AC \subset AB$ или $AB \subset AC$.

Формулируем аксиомы.

III_1. *Для каждых двух отрезков AB, CD существует отрезок AE, равный CD и налегающий на AB.*

III_2. *Для каждых двух отрезков AB, CD существует не более одного отрезка AE, равного CD и налегающего на AB.*

III_3. *Если отрезки равны одному и тому же отрезку, то они равны друг другу.*

III_4. *Если C на AB и C' на $A'B'$ и $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то $AB = A'B'$.*

III_5. (Аксиома Архимеда.) *При любых двух отрезках AB и CD существует отрезок AA_n, содержащий AB и такой, что на нем есть такие точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$, что $AA_1 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$.*

IV. Аксиома непрерывности. В ее формулировке можно ничего не менять:

---

[1]) Согласно понятию объединения аксиома II_1 состоит из двух: (1) Если C на AB и D на AC (или на BC), то D на AB. (2) Если C на AB и D на AB $(D \neq C)$, то D на AC или на BC. Такую детализацию можно, однако, считать лишней.

Если $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$, *то существует точка, принадлежащая каждому из отрезков* A_1B_1, A_2B_2, *и т. д.*

V. Плоскостные аксиомы. Эти аксиомы существенно отличаются от плоскостных аксиом, сформулированных в гл. 2.

V_1. *Существуют три точки, не лежащие на одном отрезке.*

V_2. *Если отрезок пересекает сторону треугольника, то он сам или некоторый содержащий его отрезок пересекает другую сторону, либо проходит через вершину* (рис. 105).

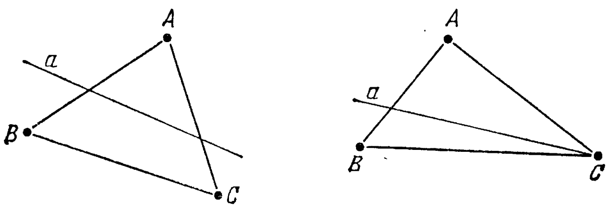

Рис. 105

Эта аксиома называется *аксиомой Паша* по имени немецкого геометра, впервые высказавшего ее в 1882 г. в равносильной форме:

Если прямая пересекает сторону треугольника и не проходит через его вершину, то она пересекает и другую сторону.

Принимаем определение. Пусть a — данный отрезок и A — точка, не принадлежащая никакому отрезку, содержащему a. Мы говорим, что точка B лежит на отрезке a с той же стороны, что точка A, если отрезок AB не имеет общих точек ни с каким отрезком, содержащим a. Соответственно, выражение: «с данной стороны от a» означает с одной стороны с данной точкой. (Из аксиомы V_2 следует, что есть только две «стороны» — две полуплоскости — относительно любого данного отрезка a, но для формулировки следующих аксиом это не нужно.)

V_3. *Для любого треугольника* ABC *и отрезка* $A'B'$, *равного* AB, *с любой данной стороны от* $A'B'$ *существует такая точка* C', *что* $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ (рис. 106).

V_4. *Если* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ *и* D, D' — *такие точки на* AB *и* $A'B'$, *что* $AD = A'D'$, *то также* $CD = C'D'$ (рис. 107).

V_5. *Если точки C, D лежат с одной стороны от отрезка AB и отрезки AC, BD равны и образуют с AB прямые углы, то $CD = AB$.*

На этом список аксиом завершается.

Сравним аксиомы $V_1 - V_5$ с плоскостными аксиомами в § 8. Аксиома V_5 повторяет аксиому параллельных отрезков.

Аксиомы V_1, V_2 содержатся в аксиоме деления плоскости, но и взятые вместе слабее ее. По аксиоме деления плоскости с каждой стороны от прямой есть точки.

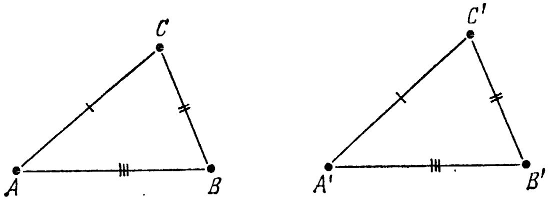

Рис. 106

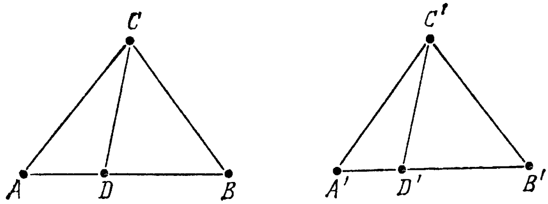

Рис. 107

Поэтому точки плоскости не лежат на одной прямой. Так что сказанное в аксиоме V_1 выполняется (говорим ли мы тут о прямой или отрезке — безразлично). Далее, пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и прямая a, не проходя ни через одну из них, пересекает, скажем, отрезок AB. Тогда по аксиоме деления плоскости точки A и B лежат с разных сторон от прямой a и точка C лежит с той же стороны, где лежит одна из них, скажем, A. Поэтому прямая a пересекает отрезок BC и не пересекает отрезок AC.

Аксиома Паша V_2 говорит только, что если прямая a пересекает отрезок AB, то она пересекает еще хотя бы один из отрезков AC, BC. Но вовсе не утверждается, что прямая a не пересекает один из них, как мы только что вывели из аксиомы деления плоскости. Таким образом, аксиомы V_1, V_2 вместе утверждают меньше, чем аксиома деления плоскости. Однако из них (с помощью линейных аксиом) можно вывести, что прямая делит плоскость.

Обратимся к аксиомам V_3, V_4 и докажем, что из них, конечно в соединении с другими, следует аксиома откладывания угла. При этом мы воспользуемся некоторыми полученными в гл. 3, 4 выводами из линейных аксиом и аксиомы деления плоскости. То, что всякая прямая делит плоскость, можно, как уже сказано, вывести, пользуясь аксиомой Паша V_2, но мы опускаем этот вывод и будем прямо пользоваться выводами из аксиомы деления плоскости. Иначе можно сказать, что мы пользуемся аксиомами гл. 2.

Теорема 1. *Если точки C, C_1 лежат с одной стороны от отрезка AB и $AC = AC_1$, $BC = BC_1$, то эти точки совпадают.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Допустим, однако, что точки C, C_1 различны, так что имеются два треугольника ABC, ABC_1 с равными сторонами, расположенными с одной стороны от AB. Из равенств $AC = AC_1$, $BC = BC_1$ очевидно, что прямая CC_1 не проходит ни через A, ни через B. Допустим, она пересекает AB в некоторой точке D (рис. 108). Тем самым в треугольниках ABC, ABC_1 имеются отрезки CD, C_1D, и по аксиоме V_4 должно быть $CD = C_1D$. Но это исключено, поскольку эти отрезки лежат на одной прямой с одной стороны от AB и точки C, C_1 различны.

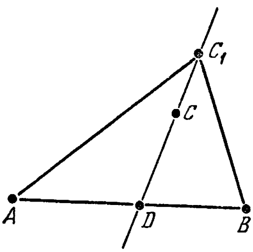

Рис. 108

Таким образом, прямая CC_1 не имеет с отрезком AB общих точек.

Рассмотрим теперь отрезки BC, BC_1. Они вместе с точками C, C_1 лежат с одной стороны от BA. Поэтому, согласно теореме 4 § 19, эти отрезки либо налегают один на другой, либо BC проходит между BA и BC_1, либо BC_1 — между BA и BC. Но так как по условию теоремы отрезки BC, BC_1 равны, то налегать они не могут, если точки C, C_1 различны. Значит, остается одна из двух возможностей, и, скажем, BC проходит между BA и BC_1, т. е. луч BC пересекает отрезок AC_1 как поперечину угла B в некоторой точке F (рис. 109).

Убедимся, что точка C не принадлежит отрезку BF. Совпадать с F она не может, так как $AC = AC_1$. А если бы точка C лежала на BF, то тем самым прямая C_1C пересекала бы поперечину BF угла C_1, а значит, и поперечину AB. Но это, как доказано, исключено.

Итак, точка C не принадлежит BF; тем самым отрезок BC содержит F, т. е. пересекает AC_1 в точке F.

Пусть теперь G — середина отрезка CC_1. Прямая BC пересекает отрезок AC_1, а значит, и AG в некоторой точке E, поскольку эти отрезки служат поперечинами угла C (рис. 110).

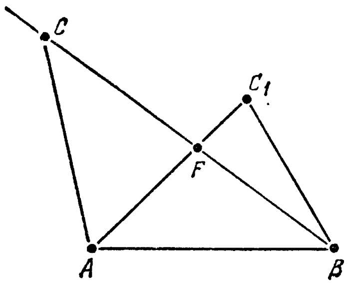

Рис. 109

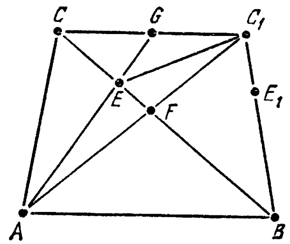

Рис. 110

Рассмотрим треугольники ACG и AC_1G. У них $AC = AC_1$, $CG = C_1G$ и сторона AG и точка E на ней общие. Поэтому согласно аксиоме V_4 $CE = C_1E$.

Теперь рассмотрим треугольник BEC_1 и «треугольник» BCE; точка E на BC, так что этот «треугольник» — отрезок BC с отмеченной точкой E. Возьмем на BC_1 такую точку E_1, что $BE_1 = BE$. Мы имеем треугольник BC_1E и точку E_1 на BC_1. Кроме того, имеем «треугольник» BCE с такими же «сторонами»: $BC = BC_1$, $EC = EC_1$, сторона BE — общая. Точка E лежит на BC и $BE = BE_1$. Поэтому согласно аксиоме V_4 отрезок EE_1 в треугольнике BEC_1 должен быть равен EE. Но это абсурд.

Таким образом, допущение, что точки C, C_1 различны, приводит к абсурду. Стало быть, эти точки совпадают, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть у треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ стороны равны ($AB = A_1B_1$ и т. д.) и пусть точки D, E и D_1, E_1 на лучах AB, AC и A_1B_1, A_1C_1 таковы, что $AD = A_1D_1$, $AE = A_1E_1$. Тогда $DE = D_1E_1$* (рис. 111).

Докажем сначала частный случай этой теоремы. *Пусть у треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ стороны равны и пусть точ-*

ки D, D_1 лежат на продолжении сторон AB, A_1B_1 так, что B на AD, B_1 на A_1D_1 и $AD=A_1D_1$. Тогда $CD=C_1D_1$ (рис. 112).

Доказательство. Пусть для треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и точек D, D_1 выполнено сказанное в условиях данного утверждения. Так как $AD=A_1D_1$, то согласно аксиоме V_3 существует такой треугольник ADC_2, что $AC_2=$ $=A_1C_1$, $DC_2=D_1C_1$, и точка C_2 лежит с той же стороны от AD, что точка C. Убедимся, что C_2 совпадает с C.

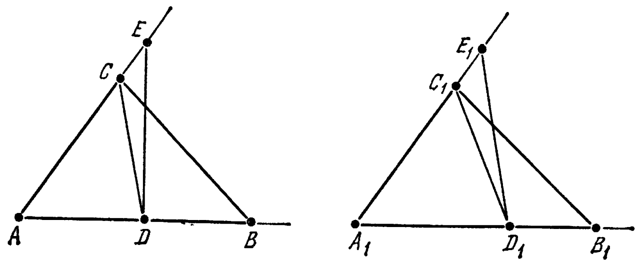

Рис. 111

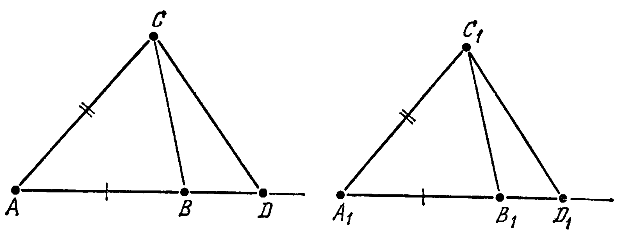

Рис. 112

В треугольниках ADC_2 и $A_1D_1C_1$ стороны равны, точка B на AD, B_1 на A_1D_1 и $AB=A_1B_1$. Поэтому по аксиоме V_4 $C_2B=C_1B_1$. Но $C_1B_1=CB$. Поэтому $C_2B=CB$. Кроме того, так как $AC_2=A_1C_1$, то $AC_2=AC$. Таким образом, у треугольников ABC и ABC_2 стороны равны. Поэтому из теоремы 1 следует, что они совпадают: C_2 совпадает с C. Но так как $C_2D=C_1D_1$, то $CD=C_1D_1$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 2. Пусть у треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ стороны равны. Пусть точки D, E лежат на лучах AB, AC и D_1, E_1 — на лучах A_1B_1, A_1C_1, причем $AD=A_1D_1$, $AE=A_1E_1$. Нужно доказать, что $DE=D_1E_1$.

Если точка D совпадает с B (или E с C), то требуемое следует из аксиомы V_4 или только что доказанного утверждения.

Пусть точки D, E не совпадают с B и C. Проведем CD и C_1D_1. Как только что доказано, $CD = C_1D_1$. Стало быть, у треугольников ACD, $A_1C_1D_1$ стороны равны. Поэтому подобно предыдущему заключаем, что $DE = D_1E_1$, что и требовалось доказать.

Треугольник ABC можно рассматривать как угол со сторонами AB, AC и поперечиной BC. Соответственно, аксиомы V_3, V_4 и доказанные теоремы 1, 2 можно пересказать как утверждения об углах и их поперечинах. Так, аксиома V_3 вместе с теоремой 1 равносильна утверждению

(А) *От каждого отрезка A_1B_1 по данную сторону от конца A_1 можно отложить угол, равный данному (по данным соответственным поперечинам BC, B_1C_1) и притом только один.*

Теорема 2 равносильна утверждению

(Б) *Если у двух углов есть равные соответственные поперечины, то все их соответственные поперечины равны.*

Эти два утверждения представляют те две части, на какие была разделена в § 9 аксиома откладывания угла, вместе они дают эту аксиому.

Замечание. Аксиомы V_1, V_5 можно заменить одной: существуют такие точки A, B, C, D, что:

(1) точки C, D лежат с одной стороны от отрезка AB,
(2) $AC = BD$,
(3) $AC \perp AB$ и $BD \perp AB$,
(4) $CD = AB$.

Короче — существует хотя бы один прямоугольник (то, что $AC \perp CD$ и $BD \perp CD$ следует из (1)—(4)).

Аксиома V_1 здесь содержится, так как точки A, B, C не лежат на одном отрезке. Вместе с тем сформулированная аксиома, можно сказать, гораздо слабее аксиомы параллельных отрезков. В той аксиоме требование выставляется для любых отрезков AB и $AC = BD$, а здесь только для каких-то данных. Однако, пользуясь равенством треугольников и существованием треугольников, равных данным, в общем, нетрудно доказать, во-первых, что требование аксиомы выполняется для любых отрезков, равных данным AB и AC. При этом получаются прямоугольники, равные $ABCD$. Далее, из таких прямоугольников можно построить «паркет», укладывая их друг к другу по сторонам, начиная с прилегающих к данной прямой, и так получить прямые, параллельные данной. После этого можно доказать, что выполняется аксиома параллельных (пользуясь рассуждением, сходным с тем, какое было применено в § 19).

Впрочем, надо заметить, что, с другой стороны, сформулированная аксиома в одном отношении сильнее аксиомы параллельных отрезков. Именно: в ней требуется существование точек с указанными свойствами, в то время как в аксиоме параллельных это вовсе не предполагается. Она говорит только, что если есть точки C, D и отрезок AB с указанными в ней свойствами, то $CD = AB$.

§ 35. Система аксиом Гильберта

Здесь мы изложим систему аксиом геометрии, предложенную крупнейшим немецким математиком Д. Гильбертом в 1899 г. и затем усовершенствованную им самим и другими математиками.

Система аксиом Гильберта заслуживает особого внимания не только потому, что она очень знаменита и о ней обычно говорят, не трудясь даже упомянуть, что были построены в то же, в общем, время еще и другие системы аксиом, не лишенные своих достоинств. Система Гильберта хороша своей ясной логической структурой и поучительна как образец аксиоматики в отвлеченном понимании, так как ее понятия нарочито отделены от наглядного представления. Кроме того, в ней есть поучительные тонкости, на которых можно видеть те ухищрения, какими достигается минимум требований, когда аксиомы не содержат уже ничего такого, что можно было бы из них убрать.

Отвлеченный взгляд на аксиоматику выражен Гильбертом в самом начале его работы «Основания геометрии»; первый ее параграф начинается словами [1]:

«Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками и обозначаем

[1] Мы здесь и далее цитируем работу Гильберта по изданию: Гильберт Д. Основания геометрии.— М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Далее даются цитаты — фразы в кавычках — со с. 57—60. Аксиомы первых двух групп приводятся в формулировках Гильберта.

A, B, C, ...; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c, ...; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ.»[1])

«Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных отношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежать», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений дается аксиомами геометрии». Аксиомы разбиты на 5 групп.

Ради краткости и простоты сравнения с уже изложенной у нас системой аксиом мы ограничиваемся планиметрией и соответственно исключаем пространственные аксиомы, а вместе с ними исключаем из основных объектов плоскости.

I. Аксиомы соединения (принадлежности). «Аксиомы этой группы устанавливают отношения принадлежности между введенными выше вещами — точками и прямыми...» При этом говорится о том, что «прямая принадлежит точке», как и «точка принадлежит прямой». Этим особенно подчеркнуто отвлечение от наглядного представления, а также и от того взгляда, что прямая есть множество точек, когда точки принадлежат ей как элементы множеству. Вместе с термином «принадлежит» Гильберт вводит и другие принятые обороты речи как «точка лежит на прямой» и т. п.

Формулируем аксиомы:

I_1. *Для любых двух точек A, B существует прямая a, принадлежащая каждой из этих двух точек A, B.*

I_2. *Для двух точек A, B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B.*

I_3. *На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

II. Аксиомы порядка. «Аксиомы этой группы определяют понятие «между» и делают возможным на основании этого понятия установить порядок точек на прямой и плоскости.

II_1. *Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C — три различные точки прямой и B лежит также между C и A.*

---

[1]) В нашей математической литературе более принято говорить «объект», но у Гильберта именно слово, означающее «вещь».

II_2. *Для любых двух точек A и B на прямой a существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C.*

II_3. *Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.*»

Вслед за этими формулировками Гильберт пишет: «Кроме этих аксиом порядка на прямой (линейных аксиом порядка), необходима еще одна аксиома, относящаяся к порядку на плоскости». Эта аксиома Паша, которая уже фигурировала у нас в предыдущем параграфе. Для ее формулировки нужно определить отрезок и треугольник. Гильберт делает это так.

«Мы рассматриваем на прямой a две точки A и B; систему двух точек A и B мы называем отрезком и будем обозначать ее AB или BA. Точки, лежащие между A и B, называются точками, расположенными (лежащими) внутри отрезка AB; точки A и B называются концами отрезка AB». (Обратим внимание, что по этому определению отрезок AB не есть совокупность или множество точек, лежащих между A и B.) Треугольником ABC называется «система» трех отрезков AB, BC, CA, если точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Аксиома Паша формулируется у Гильберта так:

«II_4. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка BC или через одну из точек отрезка CA*».

К этому Гильберт добавляет:

«Выражаясь наглядно, говорят: если прямая входит вовнутрь треугольника, то она также выходит из треугольника. Тот факт, что прямая a не может при этом пересечь обе стороны AC и CB, может быть доказан.»

Аксиомы порядка позволяют доказать, что всякая точка прямой делит ее на два луча. Луч с началом O, как его определяет Гильберт,— это совокупность всех точек прямой, лежащих с одной стороны от O. Это такие точки, что O не лежит между никакими двумя из них.

Аксиома Паша позволяет доказать, как уже было сказано в предыдущем параграфе, что выполняется аксиома деления плоскости; по отношению ко всякой прямой определены «две стороны», т. е. прямая делит плоскость на две полуплоскости; «стороной» по отношению к лучу считается, естественно, сторона по отношению к содержащей его прямой.

III. Аксиомы конгруэнтности. Мы формулируем эти аксиомы несколько иначе, короче, чем у Гильберта.

Понятие конгруэнтности относится в первую очередь к отрезкам, т. е. к парам точек. Это отношение Гильберт обозначает также словом «равен», которым мы и будем пользоваться, обозначая равенство, как и раньше.

III_1. *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному (т. е. на луче с началом A существует такая точка B, что отрезок AB равен данному).*

Однозначность такого откладывания, как подчеркивает Гильберт, не предполагается и доказывается впоследствии.

III_2. *Два отрезка, равные третьему, равны.*

III_3. *Если точка C лежит между A и B, а C' — между A' и B' и $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то и $AB = A'B'$.*

Следующая аксиома говорит об откладывании угла. При этом углом называется совокупность двух лучей с общим началом, лежащих на двух разных прямых; угол с вершиной A обозначаем $\angle A$. Говорится, что угол отложен от данного луча, по данную сторону от него, если второй его луч имеет то же начало и его точки лежат с данной стороны от первого луча. Равенство углов у Гильберта относится к основным отношениям. О нем говорится в аксиомах III_4—III_5.

III_4. *От каждого луча по данную сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один. Каждый угол равен самому себе.*

III_5. *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, то также $\angle B = \angle B'$.*

IV. Аксиома о параллельных. Эта группа аксиом состоит из одной аксиомы параллельных в стандартной формулировке:

Пусть a — произвольная прямая и A — точка, лежащая вне ее; в таком случае существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

V. Аксиомы непрерывности. В эту группу включены две аксиомы:

V_1 (аксиома Архимеда). *Пусть AB и CD — два каких-либо отрезка; тогда на прямой AB существует ко-*

нечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *таких, что отрезки* $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ *равны отрезку* CD, *и точка* B *лежит между* A *и* A_n. (Эта формулировка несколько отлична от той, какая была дана в гл. 2 или в § 34, но, очевидно, ей равносильна.)

V_3 (аксиома линейной полноты). *Точки прямой образуют систему, которая при сохранении линейного порядка, аксиом конгруэнтности и аксиомы Архимеда* (т. е. аксиом I_1—I_2, II_1—II_3, III_1, V_1) *не допускает никакого расширения, т. е. к этой системе точек невозможно прибавить еще точки так, чтобы в системе, образованной первоначальными и добавленными точками, выполнялись все указанные аксиомы.*

С помощью этой аксиомы выводится «теорема полноты»: *к точкам и прямым нельзя добавить новые точки и прямые так, чтобы выполнялись все аксиомы.* Любопытно, что в первом варианте его аксиом у Гильберта не было аксиомы полноты, и его система в таком виде не была полной. Кроме того, она содержала некоторые лишние аксиомы, которые потом были выведены из других как теоремы.

Не вдаваясь в выводы из аксиом Гильберта, отметим только любопытную особенность в аксиомах конгруэнтности. Для отрезков не требуется ни единственность откладывания, ни равенство отрезка самому себе, но требуется, чтобы два отрезка, равные третьему, были равны. Для углов все наоборот; требуется единственность откладывания и равенство угла самому себе, но не требуется, чтобы два угла, равные третьему, были равны.

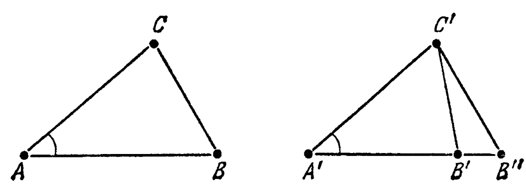

Рис. 113

Единственность откладываемого отрезка, равного данному, доказывается из аксиомы III_5. Допустим, на данном луче можно отложить два отрезка $A'B'$ и $A'B''$, равных AB. Отложив от AB и $A'B'$ равные углы, построим треугольники ABC и $A'B'C'$, $A'B''C'$, так что (рис. 113).

$$\angle A = \angle A', \quad AB = A'B', \quad A'B'' = AB, \quad AC = A'C'.$$

Тогда по аксиоме III_5 должно быть $\angle C = \angle C'$. Но так как по аксиоме III_4 угол, равный данному, откладывается только один, то точка B'' должна совпадать с B'. Этим доказано, что на данном луче откладывается единственный отрезок, равный данному AB.

Мы оставляем читателю в качестве любопытной задачи доказать, что всякий отрезок равен самому себе и что два угла, равные третьему, равны.

Возвращаясь к аксиомам порядка, можно заметить, что среди них нет даже такой, что на каждом отрезке есть точки. Это доказывается с помощью аксиомы Паша. Так же с ее помощью доказывается, что всякая точка отрезка делит его на два отрезка. Доказательство это совсем не просто.

§ 36. Аксиомы с понятием наложения

Можно исключить из основных понятий отношение равенства (конгруэнтности) отрезков, а у Гильберта — также равенства углов, введя вместо этого понятие наложения [1]).

Итак, приняв за основное понятие наложения, формулируем относящиеся к нему аксиомы.

Аксиомы наложения.

1. *Наложение сопоставляет каждой точке точку, переводя отрезки в отрезки, т. е. так, что если точкам A, B сопоставлены точки A', B', то каждой точке на AB сопоставляется точка на $A'B'$.*

2. *Два последовательных наложения дают опять наложение и для всякого наложения есть обратное.*

Назовем *флагом* (A, a, α) совокупность точки A, исходящего из нее луча a и полуплоскости α, ограниченной прямой, содержащей луч a. Аксиома требует:

3. *Для каждых двух флагов (A, a, α), (A', a', α') существует и притом единственное наложение, сопоставляющее флагу (A, a, α) флаг (A', a', α')* — (точке

[1]) Говорят еще — «движение», или «перемещение»; но эти термины связываются с представлением о процессе движения, постороннем для геометрии. Понятие же о наложении применяется в известных доказательствах теорем о равенстве треугольников, хотя и без аксиоматического определения. Излагаемая аксиоматика с наложением была предложена, хотя и в несколько иной форме, в 1904 г. немецким математиком Шуром.

A — точку A', лучу a — луч a', полуплоскости α — полуплоскость α', рис. 114).

Так как всякое наложение сопоставляет точкам точки и имеет обратное наложение, то оно представляет обратимое и, стало быть, взаимно однозначное отображение плоскости на себя. Аксиома 2 означает, что наложения образуют группу (как следует из общего вывода в § 32). Поэтому аксиомы 1—2 можно коротко выразить

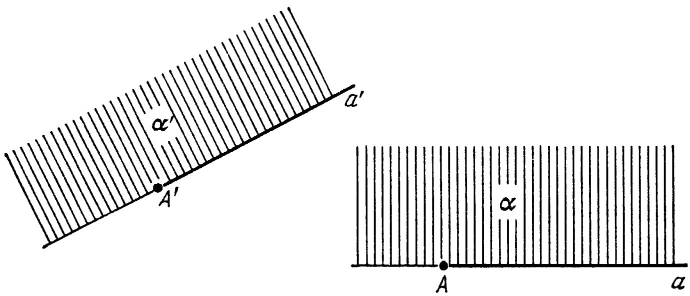

Рис. 114

так: наложения — это отображения плоскости на себя, переводящие отрезки в отрезки и образующие группу.

Равенство фигур определяется через наложение: фигура F' равна фигуре F, если существует наложение, отображающее F на F'.

Это дает определение равенства отрезков, и аксиомами наложения можно заменить все аксиомы, касающиеся равенства отрезков и углов или треугольников в § 34. И лишь необходимо сохранить аксиому Архимеда (в аксиоматике Гильберта аксиомы наложения могут заменить все аксиомы конгруэнтности).

При данном определении равенства фигур аксиома 3 очевидным образом обеспечивает возможность отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному, а также на данную сторону от луча — угол, равный данному, и притом единственный ввиду единственности наложения флага на флаг.

Аксиома 2, равносильная тому, что наложения образуют группу, обеспечивает основные свойства равенства: рефлексивность, симметричность и транзитивность. Выполняется общая теорема.

Пусть G — группа отображений какого-либо множества M на себя. Определим «конгруэнтность его подмно-

жеств по группе G» условием: N' кон N, *если в группе G существует отображение g, при котором N отображается на N': $N'=g(N)$. Тогда отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично, транзитивно.*

Доказательство. (1) Группа G содержит тождественное отображение e, так что для каждого $N\subset M$ $e(N)=N$, т. е. согласно определению N кон N (рефлексивность).

(2) Вместе с отображением g из группы в ней содержится обратное отображение g^{-1}. Если N' кон N, т. е. $N'=g(N)$, то $N=g^{-1}(N')$ и, стало быть, N кон N' (симметричность).

(3) Вместе с любыми отображениями g_1, g_2 группа содержит результирующее $g=g_2g_1$. Пусть N_1 кон N и N_2 кон N_1, т. е. существуют такие g_1, g_2, что $N_1=g_1(N)$, $N_2=g_2(N_1)$. Тем самым $N_2=g_2(g_1(N))=g(N)$, т. е. N_2 кон N (транзитивность).

Аксиома 3 обеспечивает единственность отрезка, равного данному, отложенного на данном луче. Пусть даны отрезок AB и луч a с началом O. Пусть α, β — полуплоскости, ограниченные прямой AB, и α', β' — ограниченные прямой $\bar{a}$, содержащей луч a. Существует четыре наложения, при которых отрезок AB откладывается на луче a от его начала в зависимости от

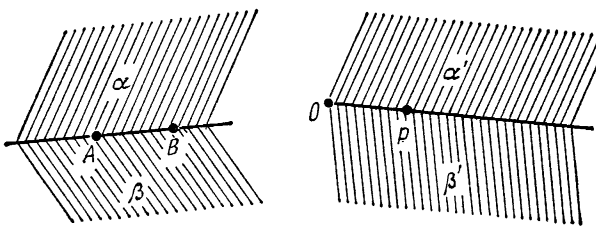

Рис. 115

того, какая полуплоскость α, β отображается на α' (или β') и какой конец A или B переходит в точку O. Однако во всех этих случаях на луче a откладывается один и тот же отрезок OP, равный AB (рис. 115).

Действительно, пусть наложение g переставляет только полуплоскости α, β, сохраняя луч a. Такое наложение само себе обратно и потому не перемещает точек луча a.

Пусть, например, точка P луча a переходит в точку Q отрезка OP, так что $g(OP)=OQ\subset OP$. Тем самым $g(OQ)\subset g(OP)=OQ$. Но так как g само себе обратно, то $g(OQ)=OP$ и, значит, $OP\subset OQ$. А так как $OQ\subset OP$, то $OQ=OP$. Если предполагать, что $g(OP)\supset OP$, то вывод будет тот же. При наложении, меняющем концы отрезка AB, заключение аналогично, но доказательство сложнее.

§ 37. Незамкнутые системы аксиом

Рассмотрим примеры незамкнутой аксиоматики, в которой считается известным понятие вещественного числа или понятие величины в качестве длины отрезка, или расстояния между точками. Примеры такой аксиоматики дают учебники геометрии, и потому особенно полезно рассмотреть их рядом с другими, замкнутыми системами аксиом, представленными выше, тем более потому, что изложение в учебниках требует корректив.

Если ввести в аксиомы понятие о длине отрезка или о расстоянии между точками как о величине, то можно высказать следующие «аксиомы длины» вместо наших «аксиом о равенстве отрезков». (Формально можно ввести в основные понятия: объект — длину и отношение «обладания» — отрезок имеет длину.)

Аксиомы длины.

1. *Каждый отрезок имеет определенную длину.*

2. *Длина — это величина.*

К этим аксиомам присоединяется определение: отрезки, имеющие одну и ту же длину, называются *равными*.

3. *Если точка C лежит на отрезке AB, то длина AB равна сумме длин AC и BC.*

4. *Каковы ни будь отрезки AB и CD, вдоль AB можно отложить отрезок AE, равный CD, и притом только один.*

Владея понятием численного значения величины, легко из данных аксиом прийти к численной длине при любом заданном масштабе, т. е. к выводам § 15.

В евклидовой геометрии отрезкам не соответствует само собой никакое численное значение длины, как паре точек — никакие численные значения расстояния: они появляются только в результате выбора единицы измерения. Нет их и в реальном пространстве. Поэтому если формулируют как аксиому планиметрии: «любым двум точкам поставлено в соответствие неотрицательное действительное число»...[1]), то получается аксиоматика не самой планиметрии, а планиметрии с фиксированным единичным отрезком — с фиксированной единицей длины. Численные расстояния не принадлежат самой геометрии, они — только ее вспомогательное средство.

Так же нет у углов самих по себе никакой градусной или другой подобной меры. Деление прямого угла на 90, а, скажем, не на 100 градусов есть чистая условность[2]). Однако формулируют как аксиому: «Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°»[3]). Поэтому если точно понимать сказанное как аксиому геометрии, то нужно считать, что, сопоставляя развернутому углу не 180, а, скажем, число 200, получаем уже другую геометрию.

Ввиду этих замечаний мы изложим рассматриваемую аксиоматику, предложенную А. В. Погореловым, в измененном виде, в каком она представляет планиметрию, свободную от заранее данных единиц измерения.

Аксиоматика планиметрии с численными значениями длины отрезка и меры угла.

Основные объекты: 1) *точки*; 2) *прямые*. Основные отношения: 1) точка *принадлежит* прямой; 2) точка *лежит между двумя другими*.

Отрезок определяется как множество точек, лежащих между двумя данными. Луч OA с началом O (где O, A — различные точки) можно определить как множество таких точек M прямой, содержащей точки O, A, что O не лежит между A и M. (То, что точка прямой делит ее на два луча, доказывается из аксиом и в данном определении не подразумевается.) Углом с вершиной O называется пара лучей (различных) OA, OB с общим началом O; если при этом точки O, A, B лежат на одной прямой и O — между A и B, то угол называется развернутым[4]).

(Можно включить в основные понятия «длину отрезка в данном масштабе» и «меру угла в данном масшта-

---

[1]) Эта формулировка из учебника А. Н. Колмогорова, А. Ф. Семеновича, Р. С. Черкасова «Геометрия 6—8», с. 374 (М.: Просвещение, 1979).

[2]) Между отрезками и углами есть, однако, существенная разница: у отрезков нет геометрически выделенного масштаба, а для углов есть — это прямой угол (или развернутый).

[3]) См.: Погорелов А. В. Геометрия.— 2-е изд.— М.: Наука, 1984, с. 175.

[4]) В изложении А. В. Погорелова в цит. соч. начало луча ему не принадлежит, как не принадлежат отрезку его концы.

бе»; отношение обладания — отрезок имеет длину, угол имеет меру. Но проще в аксиомах, где появляется длина и мера угла, сразу говорить, что это вещественные числа. Включать их в основные понятия, о которых «все сказано в аксиомах», не имеет особого смысла: чтобы о них все было сказано в аксиомах, нужно было бы включить все аксиомы вещественных чисел.)

Формулируем аксиомы.

I. Аксиомы принадлежности

I_1. *Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.*

I_2. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

II. Аксиомы порядка.

II_1. *Если одна точка лежит между двумя другими, то все три принадлежат одной прямой. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими*[1].

II_2. *Прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек на два подмножества (полуплоскости) так, что отрезок, соединяющий точки одной полуплоскости, не пересекается с прямой, а отрезок, соединяющий точки разных полуплоскостей, пересекается с прямой.*

Замечание. Начало аксиомы II_2, поскольку термин «разбивает» заранее не определен, нужно понимать просто в следующем смысле: «для всякой прямой множество всех не принадлежащих ей точек разбивается на два подмножества (полуплоскости) так, что...» то, что множество «разбивается» на некоторые подмножества, означает, что эти подмножества образуют в объединении все множество и не имеют попарно общих точек. Понимать же «разбивает» в том смысле, как было определено в § 24, что точки из разных подмножеств нельзя соединить ломаной, не пересекая прямую, не нужно, так как об этом говорится в аксиоме дальше.

III. Аксиомы меры для отрезков и углов.

III_1. *Если выбран единичный отрезок e (т. е. такой, которому отнесено число 1), то каждому отрезку a однозначно сопоставляется положительное вещественное число $l(a/e)$ — его численная длина в масштабе e, и если взят другой единичный отрезок e_1, то равенство численных*

[1]) В цитированном учебнике первая часть этой аксиомы не включена ни в нее, ни в другую аксиому, но, очевидно, она должна быть включена в аксиомы.

длин сохраняется, т. е. если

$$l(a/e)=l(b/e), \text{ то } l(a/e_1)=l(b/e_1).$$

Аксиома III_1 позволяет определить равенство отрезков по равенству их длин: отрезки a, b называются равными, если в каком-либо масштабе e их длины равны (это не зависит от выбора масштаба, так как по последнему условию аксиомы III_1 замена масштаба сохраняет равенство длин).

III_2. *Если точка C принадлежит отрезку AB, то при любом масштабе длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.*

Для углов выполняются следующие две аксиомы, аналогичные III_1, III_2.

III_3. *Если выбран (неразвернутый) угол ε, которому отнесено в качестве меры число 1, то каждому углу α однозначно сопоставляется положительное вещественное число $\varphi(\alpha/\varepsilon)$ — его численная мера при данной «единице» ε, и если взята другая единица ε_1, то равенство мер сохраняется: если*

$$\varphi(\alpha/\varepsilon)=\varphi(\beta/\varepsilon), \quad \text{то} \quad \varphi(\alpha/\varepsilon_1)=\varphi(\beta/\varepsilon_1).$$

III_4. *Если луч c проходит из вершины угла между его сторонами a, b, то при любой единице мера угла ab равна сумме мер углов ac, bc. При этом считается, что луч проходит между сторонами неразвернутого угла ab, если он пересекает какую-нибудь поперечину, а если угол ab развернутый, то любой луч, отличный от a и b, идущий из вершины, считается проходящим между a и b.*

Аксиома III_3 позволяет определить равенство углов по равенству их мер при любой данной единице так же, как это делается для отрезков.

IV. Аксиома существования треугольника, равного данному. Ей предпосылаем некоторые определения. Треугольником ABC называется совокупность трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков AB, BC, CA. Углом A треугольника ABC называется угол, образуемый лучами AB, AC; углы B, C определяются аналогично.

Два треугольника называются равными, если их вершины можно обозначить A, B, C и A_1, B_1, C_1 так, что

$$AB=A_1B_1, \quad AC=A_1C_1, \quad BC=B_1C_1,$$

$$\angle A=\angle A_1, \quad \angle B=\angle B_1, \quad \angle C=\angle C_1.$$

IV. *Пусть даны — треугольник ABC, луч a и указана полуплоскость относительно прямой, содержащей этот луч. Существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с началом луча a, вершина B_1 лежит на луче a, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости.*

V. Аксиома существования отрезка данной длины.

V. *Можно так выбирать единичный отрезок e, что каково бы ни было вещественное число d, существует отрезок длины d в масштабе e.*

Тогда (в силу аксиомы III_1) *то же верно при любом масштабе.*

VI. Аксиома параллельных. Она формулируется как обычно. На этом список аксиом кончается. Сделаем из них основные выводы.

Выберем единичный отрезок e и, в согласии с аксиомой V, будем все длины выражать в масштабе e, обозначая длину отрезка, как сам отрезок.

Лемма. *На каждом луче OA при всяком $d > 0$ найдется такая точка B, что $OB = d$.*

Доказательство. Пусть даны луч OA и число $d > 0$. По аксиоме V существует отрезок PQ с длиной, равной d. Взяв точку R, не лежащую на прямой PQ, построим треугольник PQR. По аксиоме IV существует треугольник OBC со стороной OB на луче OA, равной отрезку PQ. Тем самым на луче OA есть отрезок OB с длиной, равной d, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Каждая точка прямой делит ее на два луча.*

Доказательство. Пусть A — данная точка прямой a. На прямой a есть еще другая точка B, и, стало быть, имеем луч BA. Из доказанной леммы непосредственно следует, что на этом луче можно отложить отрезок BC с длиной, большей длины BA. По определению луча BA точка B не лежит между A и C. Поэтому согласно аксиоме II_1 либо точка A лежит между B и C, либо точка C лежит между A и B. Но в последнем случае по аксиоме III_2 $AB = AC + BC > BC$ (так как по аксиоме III_1 $BC > 0$). Это противоречит тому, что по выбору длины отрезка BC, $BC > BA$. Следовательно, точка A лежит между B и C.

Тем самым на прямой a имеем два разных луча AB и AC.

Теперь возьмем точку D, не лежащую на прямой a (такая точка существует в силу аксиомы I_2 [1]). По аксиоме I_1 существует прямая AD. По аксиоме II_2 она разбивает плоскость, и так как точка A лежит на отрезке BC, то точки B и C лежат в разных полуплоскостях. Тем самым прямая AD разбивает вместе со всей плоскостью прямую a (за вычетом точки A) на два подмножества b, c — одно b, содержащее точку B, другое c, содержащее точку C. Это и будут лучи AB, AC.

Действительно, если, например, точка M принадлежит b, то по свойству полуплоскости отрезок BM не пересекает прямую a, т. е. не содержит точку A; тем самым M принадлежит лучу AB.

Итак, точка A разбивает прямую на два луча, что и требовалось доказать.

Если точка A лежит между точками C и D, то эти точки принадлежат разным лучам. Поэтому если C на луче AB, то луч AC — тот же, что луч AB.

Теорема 2. *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок любой данной длины, и притом только один, т. е. на любом луче OA при любом данном $d > 0$ существует, и притом единственная, точка B такая, что $OB = d$, и отрезок OB содержится в луче OA.*

Доказательство. Существование такой точки B установлено доказанной выше леммой. Допустим, на луче OA есть две точки B и C с $OB = OC = d$. По теореме 1 точка O делит прямую OA на два луча. Точки B и C принадлежат одному из них, и, стало быть, O не лежит между ними. Следовательно, по аксиоме II_1 либо B лежит между C и O, либо C — между B и O.

Пусть, например, B лежит между C и O. Тогда по аксиоме III_2 $CO = CB + BO$. И так как по аксиоме III_1 $CB > 0$, то $CO > BO$ вопреки тому, что по условию $CO = BO$. Следовательно, двух точек B, C, дающих равные отрезки OC, OB, нет, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *На всяком отрезке есть точки, и каждая лежащая на отрезке точка делит его на два отрезка.*

Доказательство. Пусть AB — данный отрезок. Откладывая на луче AB отрезки $AC < AB$, будем получать

---

[1] По аксиоме I_2 существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Если бы не было точки, не лежащей на прямой a, то получилось бы, что все точки лежат на ней вопреки аксиоме I_2.

точки C отрезка AB[1]). При данной C остальные точки отрезка делятся на такие M, для которых $AM < AC$, и такие M, для которых $AM > AC$. Они и образуют отрезки AC, CB.

Докажем теперь теоремы об откладывании угла и о равенстве друг другу всех развернутых углов. (Тем самым особо постулировать в аксиомах равенство их мер нет надобности; их равенство и дает основание введению градусной меры.) При этом мы воспользуемся некоторыми терминами и выводами, касающимися расположения лучей, полученными раньше на основе аксиом из гл. II. Это допустимо, поскольку аксиома о делении плоскости, очевидно, равносильна аксиоме II_2 о полуплоскостях.

Теорема 4. *От каждого луча по данную сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один, т. е. при любом данном угле из начала любого данного луча a исходит луч b по данную сторону от a такой, что угол ab равен данному, и такой луч b единственный.*

Доказательство. Пусть даны луч a с началом O_1 и угол с вершиной O. Взяв на его сторонах какие-нибудь точки A, B, построим треугольник OAB. По аксиоме IV существует равный ему треугольник $O_1A_1B_1$ с вершиной, соответствующей O в начале луча O_1, со стороной, лежащей на луче a, и расположенный с заданной стороны от него. Угол O_1 в этом треугольнике и будет углом, равным данному углу O, отложенным от луча a, как требуется.

Докажем, что такой угол только один. Допустим, есть два таких угла $\angle ab$, ac. Лучи b, c исходят из начала луча a с одной стороны от него. По теореме 4 из § 19 либо b проходит между a и c, либо c — между a и b. Пусть, например, b проходит между a и c. Тогда из аксиомы о сумме углов следует, что мера $\angle ac$ равна сумме мер $\angle ab$ и $\angle bc$ и тем самым $\angle ac$ больше $\angle ab$. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда лучи b, c совпадают, что и доказывает единственность угла O_1.

Теорема 5 (первый признак равенства треугольников). *Если у треугольников ABC и*

[1]) Так как C на луче AB, то либо C между A и B, либо B между C и A. Но в последнем случае $AC = AB + BC > AB$ вопреки тому, что $AC < AB$.

$A_1B_1C_1$ *угол* A *равен углу* A_1, *а также* $AB = A_1B_1$ *и* $AC = A_1C_1$, *то* $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. По аксиоме IV существует треугольник ABC_2, равный треугольнику $A_1B_1C_1$ и расположенный от AB с той же стороны, что и $\triangle ABC$ (причем $AC_2 = A_1C_1$, $BC_2 = B_1C_1$). У него угол A_1 равен углу A в треугольнике ABC. Поэтому в силу предыдущей теоремы эти углы совпадают. И так как стороны, заключающие их, равны, то и сами треугольники ABC_2 и ABC совпадают. Тем самым $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Все развернутые углы равны.*

Доказательство. Пусть даны два развернутых угла с вершинами O, O_1. Возьмем на их сторонах точки A, B и A_1, B_1 так, что $AO = OB = A_1O_1 = O_1B_1$. Построим какой-нибудь треугольник ABC и равный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (по аксиоме IV). Тогда $\angle A = \angle A_1$, и так как $AO = A_1O_1$, $AC = A_1C_1$, то по теореме 5 $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$. Аналогично $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$. И тем самым углы при O и O_1 равны, а тогда по аксиоме III_4 равны их суммы, т. е. равны развернутые углы O, O_1. Теорема доказана.

§ 38. Независимость аксиом

О независимости аксиом уже было сказано в § 29.

Аксиома в данной системе аксиом называется независимой, если ее нельзя вывести из других аксиом системы. Если такой вывод возможен, то аксиома, собственно, лишняя, поэтому естественно желание освободиться от таких лишних аксиом и тем обеспечить независимость оставшихся аксиом. Со времен Евклида более 2000 лет продолжались попытки вывести аксиому параллельных из других предпосылок евклидовой геометрии, пока, наконец, в XIX в. не была установлена независимость этой аксиомы. Вслед за этим было установлено общее понятие независимости аксиом и общий принцип ее доказательства.

Доказательство независимости данной аксиомы A в системе аксиом S достигается указанием модели, в которой выполняются все аксиомы системы S кроме аксиомы A.

Доказательство независимости аксиомы параллельных сложно и будет дано особо в следующем параграфе. Здесь же, для примера, докажем независимость некоторых других аксиом нашей системы, изложенной в § 34.

1. Независимость аксиомы I_5, что на каждом отрезке есть точки. Возьмем три вершины равностороннего треугольника. Отрезком будем считать любую пару этих точек, сами точки — концами отрезка; равными считаем любые два отрезка. Все аксиомы будут выполнены, кроме аксиомы I_5. Например, аксиома деления отрезка начинается условием: «если C на AB, то»... Но условие это не выполнено, поскольку никакой точки на отрезке AB нет, поэтому аксиома выполняется, хотя становится бессодержательной. Это подобно тому, как утверждение: «если бы у меня хватило денег, я бы купил машину» может быть верным, но условие не выполнено: денег нет. Так, вообще утверждение вида «если A, то B» будет верным, если условие A не выполнено, поэтому аналогично аксиоме деления отрезка большинство других аксиом выполняется из-за невыполнения входящего в них условия. Другие аксиомы, как, скажем, аксиома V_3 в группе плоскостных аксиом (о существовании треугольника), выполняется тривиальным образом. Проверьте выполнение всех аксиом (кроме I_5).

2. Независимость аксиомы III_2 о единственности откладывания отрезка. Если считать все отрезки равными, то единственность откладываемого отрезка не имеет места, но все остальные аксиомы выполняются.

3. Независимость аксиомы, что каждые две точки соединимы отрезком, доказывается так же просто. Пусть имеется всего три точки и никаких отрезков. Все аксиомы формально выполнены (убедитесь), но аксиома соединения точек отрезком не выполняется.

4. Независимость аксиомы Паша. В пространстве она не выполняется, но все другие аксиомы, очевидно, выполняются. Следовательно, она независима (подчеркнем, что по определению «сторона от отрезка a» задается какой-либо точкой A и точка B лежит с той же стороны, если AB не пересекает a).

5. Независимость аксиомы непрерывности доказывается на числовой модели. Пусть S — система чисел, получающихся из единицы путем применения действий $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$ и $\sqrt{x^2+y^2}$, так что S вместе с двумя числами x, y содержит и получающиеся из них этими действиями. Если в числовой моде-

ли, изложенной в § 30, допускать значение координат только из системы S, то все аксиомы будут выполнены, кроме аксиомы непрерывности, потому что система S содержит далеко не все числа. (Убедитесь в сказанном.)

6. Независимость аксиомы Архимеда доказывается на модели, в которой координатами точки служат некоторые функции. Именно: берутся функции переменной t, которые получаются из t путем тех же операций: $f(t)+g(t)$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\sqrt{f^2+g^2}$. Эти функции образуют, по выражению Гильберта, «некоторого рода комплексную числовую систему» $\Omega(t)$. В ней имеют место все обычные вычислительные правила. Аксиома Архимеда в модели с координатами из $\Omega(t)$ не выполняется; такое доказательство независимости аксиомы Архимеда было дано Гильбертом. Оно изложено в книге Гильберта «Основания геометрии» (М.; Л.: ОГИЗ, 1948). Там же рассматривается независимость некоторых других аксиом системы Гильберта.

§ 39. Независимость аксиомы параллельных

Аксиома параллельных независима: существуют модели, в которых реализуются все аксиомы планиметрии, кроме аксиомы параллельных. Укажем одну из таких моделей, в которой явно реализуются аксиомы наложения. Мы выбираем ее потому, что она определяется очень просто (модель эта известна как модель Кэли — Клейна, так как была указана Клейном на основе результатов Кэли; см. гл. 9).

В этой модели роль плоскости играет внутренность единичного круга на обычной евклидовой плоскости. Точками в модели служат точки внутри круга; прямыми — хорды с исключенными концами (поскольку рассматривается только внутренность круга); отрезками служат отрезки хорд. За наложение принимаем любое преобразование (взаимно однозначное отображение), отображающее взятый круг на себя, при котором хорды переходят в хорды. Тогда оказывается, что все аксиомы выполняются, кроме аксиомы параллельных. Она, очевидно, не выполняется; через точку, не лежащую на данной хорде — «прямой», проходит бесконечно много хорд «прямых», не пересекающих данную хорду (рис. 116, a).

Однако доказательство того, что указанные преобразования обладают свойствами наложения, представляет некоторые трудности. Поэтому вместо указанных геометрически определенных преобразований введем их представление в координатах, и всю модель опишем в прямоугольных координатах x, y евклидовой плоскости.

Плоскостью в модели служит внутренность единичного круга с центром в начале координат (рис. 116, *б*):

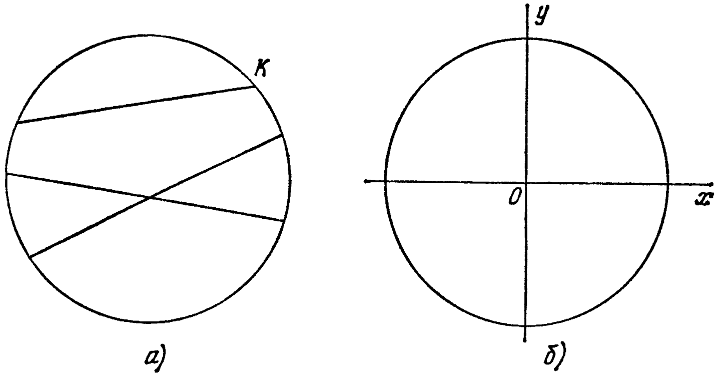

Рис. 116

Так что точки модели — это точки (x, y) с условием

$$x^2 + y^2 < 1. \qquad (1)$$

«Прямые» — это хорды без концов, т. е. они определяются линейными уравнениями

$$ax + by + c = 0$$

с условием (1) на x, y. Отрезки — это отрезки хорд, и порядок точек понимается как обычный их порядок на прямой.

Соответственно, «луч» — это часть «прямой» — хорды, ограниченная на ней одной ее точкой. «Полуплоскость» — это часть внутренности круга, ограниченная хордой.

«Наложения» определяются как произвольные сочетания (композиции) двух видов преобразований внутренности круга:

(I) Вращения вокруг центра и отражения в диаметрах.

(II) «Смещения» вдоль оси x: преобразования, сопоставляющие точкам (x, y) точки (x', y') по формулам

$$x' = \frac{x+a}{1+ax}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1-a^2}}{1+ax} \qquad (|a|<1). \tag{2}$$

Докажем, что композиции указанных преобразований (I), (II), в самом деле, удовлетворяют аксиомам наложения, т. е. что они:

(А) отображают «плоскость» на себя и «прямые» на «прямые», сохраняя на них порядок точек;

(Б) образуют группу;

(В) для каждых двух «флагов» F, F' существует, и притом единственное, «наложение», переводящее флаг F в F'. При этом «флаг», в согласии с определением в § 36,— это точка, исходящий из нее «луч» и «полуплоскость», ограниченная «прямой», содержащей этот «луч» (рис. 117).

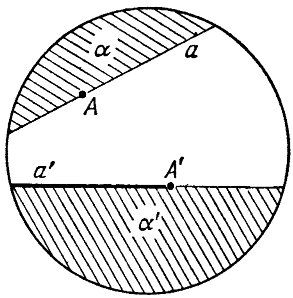

Рис. 117

Доказательство. Свойство (А) для преобразований (I) — вращений вокруг центра и отражений в диаметрах — очевидно. Докажем то же для «смещений» (II).

Из формул (2) легко выводится, что если $x^2 + y^2 < 1$, то также $x'^2 + y'^2 < 1$. Тем самым каждая точка внутренности нашего круга переходит в точку тоже внутри него, это значит, что «плоскость» отображается в себя.

Преобразование, обратное (II), имеет вид

$$x = \frac{x'-a}{1-ax'}, \quad y = \frac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'}, \tag{3}$$

т. е. оно тоже (II), но с заменой a на $-a$. Поэтому для него верен тот же вывод; так что каждая точка (x', y') внутри круга служит образом какой-либо точки (x, y). Тем самым «смещение» отображает «плоскость» *на* «плоскость».

Теперь посмотрим, что происходит с «прямыми», т. е. с хордами. Хорда (как часть прямой) задается линейным уравнением

$$px + qy + r = 0$$

с условием $x^2 + y^2 < 1$. Если в это уравнение подставим выражения x, y из (3), то получим линейное уравнение

$$p'x' + q'y' + r' = 0. \tag{4}$$

Оно также представляет прямую[1]. И так как круг K отображается на себя, то и вся лежащая в нем часть прямой, т. е. хорда, отображается на хорду с уравнением (4).

Итак, «смещения» переводят «прямые» в «прямые». Покажем, что они сохраняют при этом порядок точек.

Из формул (2) для точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) легко выводится, что

$$x_1' - x_2' = \frac{(x_1 - x_2)(1 - a^2)}{(1 + ax_1)(1 + ax_2)} \quad (|a| < 1). \tag{5}$$

Тем самым если $x_1 > x_2$, то и $x_1' > x_2'$. А это, очевидно, означает, что на всякой прямой порядок точек сохраняется, кроме прямых, на которых $x = \text{const}$.

Но если $x = x_0 = \text{const}$, то $x' = \text{const}$ и порядок точек на таких прямых определяется значениями координаты y. А из выражения для y' ясно, что если $x = x_0 = \text{const}$, то при $y_1 > y_2$ также $y_1' > y_2'$, т. е. порядок сохраняется.

Итак, свойства (A) для «наложений» установлены.

Свойство (Б) состоит в том, что композиции преобразований (I) и (II) образуют группу. Произведение (композиция) двух таких композиций есть их композиция. Преобразование, обратное композиции преобразования (I), (II), составляется из обратных преобразований. А они — тоже преобразования вида (I), (II). Эти два свойства и означают, что композиции преобразований (I), (II) образуют группу.

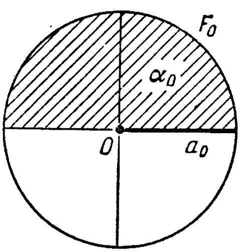

Рис. 118

Установим свойство (В), касающееся преобразования флагов. Пусть F_0 — флаг, у которого точка — центр круга O, «луч» — радиус a_0 на положительной полуоси x, «полуплоскость» α_0 — тот полукруг, где $y > 0$ (рис. 118).

Пусть теперь F — произвольный флаг (A, a, α). Преобразуем его во флаг F_0.

Поворотом вокруг центра O переведем радиус, идущий через A, в радиус a_0. Точка A перейдет в какую-то точку

[1]) Не может оказаться, чтобы $p' = q' = 0$, потому что, обратно выражая x', y' через x, y, мы должны получить исходное уравнение.

A_1. Ее мы переведем в центр O «смещением» вдоль оси x (если x_1 — координата x точки A_1, то это «смещение» задается формулами (3) с $a = x_1$). Полухорда — «луч» a — в результате этих преобразований перешла в некоторую полухорду — «луч» a_1 с началом O, т. е. некоторый радиус. Поворотом вокруг центра O переведем его в радиус a_0.

В результате всех этих преобразований «полуплоскость» α отобразится на полукруг, ограниченный осью x. Если это — полукруг, где $y > 0$, т. е. «полуплоскость» α_0, то мы тем самым преобразовали флаг $F(A, a, \alpha)$ в $F_0(0, a_0, \alpha_0)$. Если же получился полукруг, где $y < 0$, то произведем отражение в оси x. И тогда флаг F перейдет полностью в F_0.

Итак, мы доказали, что всякий флаг F можно перевести во флаг F_0 композицией преобразований (I), (II).

Пусть теперь дано два флага F_1, F_2, и нужно перевести F_1 в F_2. Пусть f_1 и f_2 — преобразования, переводящие F_1 в F_0 и F_2 в F_0. Произведем преобразование f_1 — флаг F_1 перейдет в F_0; затем произведем преобразование f_2^{-1}, обратное f_2; оно переведет флаг F_0 в F_2. Тем самым композиция (сначала f_1 потом f_2^{-1}) переведет F_1 в F_2. А так как композиции преобразований (I), (II) образуют группу, то полученное преобразование есть также композиция преобразований (I), (II).

Таким образом, любой флаг F_1 преобразуем в любой другой F_2 композицией преобразования (I), (II), т. е. «наложением».

Теперь остается доказать, что «наложение», переводящее данный флаг F_1 в данный F_2, только одно. Это равносильно тому, чтобы доказать, что «наложение», сохраняющее какой-либо флаг F, есть тождественное преобразование. (Если g, h — преобразования, переводящие F_1 в F_2, так что $F_2 = g(F_1)$ и $F_2 = h(F_1)$, то $F_1 = h^{-1}(F_2)$ и, значит, $F_1 = h^{-1}g(F_1)$, т. е. преобразование $h^{-1}g$ переводит F_1 в себя. Если $h^{-1}g$ — тождественное, то $g = h$.)

Так как любой флаг F можно перевести в F_0, то достаточно доказать, что «наложение», сохраняющее флаг F_0, тождественное.

Для доказательства заметим, что всякая композиция преобразований (I), (II) представляется формулами вида

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}. \tag{6}$$

Действительно, преобразования (II) представляются такими формулами частного вида (3), а преобразования (I), т. е. повороты и отражения, представляются линейными формулами, т. е. частным видом формул (6). Композиция же преобразований, представляемых формулами (6), опять представляется формулами того же вида, как это нетрудно проверить. Тем самым композиции преобразований (I), (II) представляются формулами (6), и нам достаточно доказать, что преобразование f вида (6), сохраняющее флаг F_0, тождественное.

При таком преобразовании f начало переходит в начало, т. е. если $x=y=0$, то и $x'=y'=0$. Подставляя это в формулы (6), находим, что в них должно быть $c = c_1 = 0$. Напротив, $c_2 \neq 0$, так как знаменатель не может обращаться в нуль нигде внутри круга. Разделив на c_2, можно считать $c_2 = 1$. Таким образом, формулы (6) для преобразования f имеют вид

$$x' = \frac{ax+by}{a_2x+b_2y+1},\qquad y' = \frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y+1}. \tag{7}$$

Так как начало остается на месте, то хорды, проходящие через начало, переходят в хорды, проходящие через начало; тем самым диаметрально противоположные точки переходят в диаметрально противоположные. Они отличаются знаком x и y. Но это возможно, лишь если x, y отсутствуют в знаменателе, т. е. формулы (7) для f имеют вид

$$x' = ax+by,\qquad y' = a_1x+b_1y.$$

При преобразовании f точка $(1, 0)$ переходит в себя, так что при $x=1$, $y=0$ должно быть $x'=1$, $y'=0$. Поэтому $a=1$ и $a_1=0$, так что

$$x' = x+by,\qquad y' = b_1y. \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$x'^2+y'^2 = x^2+2bxy+\left(b^2+b_1^2\right)y^2 = (x^2+y^2)+2bxy+\left(b^2+b_1^2-1\right)y^2.$$

Преобразование f сохраняет единичную окружность, так что при $x^2+y^2=1$ должно быть $x'^2+y'^2=1$. Поэтому при всех x, y с $x^2+y^2=1$ должно быть

$$2bxy+(b^2+b_1^2-1)\,y^2=0.$$

Полагая $x=0$, $y=1$, получаем $b^2+b_1^2-1=0$ и потому при $x, y\neq 0$ получаем $b=0$. Так что $b_1^2=1$, $b_1=\pm 1$. Но так как сохраняется флаг F_0, то при $y>0$ должно быть $y'>0$, так что $b_1=1$. Таким образом, преобразование f представляется из формул (8) в виде $x'=x$, $y'=y$, т. е. оно тождественное, что требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что введенные «наложения» обладают всеми свойствами (А), (Б), (В), т. е. в нашей модели выполняются аксиомы наложения.

Аксиомы сочетания и порядка выполняются очевидным образом, так же как аксиома непрерывности. Остается проверить только аксиому Архимеда.

Для проверки аксиомы Архимеда достаточно рассмотреть отрезки на оси x, отложенные от центра, поскольку доказано, что всякий луч можно путем «наложения» перевести в радиус на оси x.

Пусть на оси x даны отрезки OA, OB с концами $(0, 0)$, $(a, 0)$ и $(0, 0)$, $(b, 0)$. При смещении, переводящем O в какую-либо точку $C(c, 0)$ на оси x, разность координат преобразуется по формулам (5). Для отрезка OB $x_1=b$, $x_2=0$, и потому при указанном смещении получим отрезок, евклидова длина которого будет

$$b'=x_1'-x_2'=\frac{(x_1-x_2)(1-c^2)}{(1+cx_1)(1+cx_2)}=\frac{b(1-c^2)}{1+cb}.$$

Мы видим, что эта длина тем меньше, чем больше c, т. е. чем дальше смещается отрезок. Поэтому при откладывании отрезка OB на отрезке OA евклидова длина будет всегда больше, чем у отрезка, равного OB и смещенного на a. Поэтому как конечное число таких отрезков покрывает OA в евклидовом смысле, так тем более отрезки, равные OB в смысле нашей модели, покроют отрезок OA. То есть аксиома Архимеда выполняется.

Итак, мы доказали, что в рассматриваемой модели выполняются все аксиомы евклидовой планиметрии, кроме аксиомы параллельных; тем самым независимость ее доказана.

§ 40. Геометрия Лобачевского

Доказательство независимости аксиомы параллельности является вместе с тем доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского: была указана ее модель. Как доказывается, аксиоматика геометрии Лобачевского является полной; все ее реализации (модели) изоморфны, и, следовательно, ее можно определить, сославшись на любую из моделей, в частности на данную в предыдущем параграфе. Поэтому можно сказать, что *геометрия Лобачевского на плоскости есть не что иное, как геометрия внутри круга, представленная особым образом, описанным в указанной модели.*

Итак, есть только две геометрии — Евклида и Лобачевского — с полными системами аксиом, отличающиеся по одной аксиоме параллельных. Поэтому любой факт одной из этих геометрий, не имеющий места в другой, отличает ее и может заменить аксиому параллельных[1]). Приведем ряд таких фактов геометрии Лобачевского. Они интересны и сами по себе, показывая, насколько эта геометрия отличается от евклидовой.

1. В геометрии Лобачевского не выполняется наша аксиома параллельных отрезков: если равные отрезки AC и BD проведены перпендикулярно отрезку AB в одну сторону от него, то $CD \neq AB$. Более того, заведомо $CD >$ $> AB$, и с увеличением длин отрезков AC, BD расстояние CD неограниченно растет. Это значит, что прямые AC и BD с общим перпендикуляром AB неограниченно расходятся в обе стороны. Выполняется даже следующее.

Пусть прямая a перпендикулярна отрезку AB в его середине. Тогда прямые, ей перпендикулярные и пересекающие ее достаточно далеко от AB, не пересекают прямых AC, BD — лежат в полосе между ними.

Это видно на модели (рис. 119). Из симметрии относительно диаметра круга ясно, что хорда, перпендикулярная диаметру, изображает прямую, перпендикулярную

[1]) Докажем сказанное. Обозначим аксиому параллельных как «Пар» и ее отрицание — «не Пар». И пусть T — такая теорема геометрии Евклида, что в геометрии Лобачевского выполняется ее отрицание «не». Заменим аксиому параллельных на T, сохраняя все другие аксиомы. Предположим, что такая система аксиом допускает вывод «не Пар». Но «не Пар» вместе с другими аксиомами влечет геометрию Лобачевского, а значит, и не T. Получается противоречие. Следовательно, замена Пар на T сохраняет геометрию Евклида, и тем самым «не T» влечет геометрию Лобачевского.

прямой, изображаемой диаметром. Поэтому на рисунке хорды b, c — это прямые, перпендикулярные a.

2. Во всяком сколь угодно малом угле (как части плоскости) содержатся прямые, не пересекающие его сторон и, в частности, перпендикулярные биссектрисе. Это также видно на модели (рис. 120).

3. Если две прямые не пересекаются, то они либо имеют, и притом единственный, общий перпендикуляр и бесконечно расходятся друг от друга в обе стороны, либо

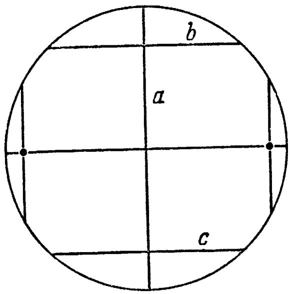

Рис. 119

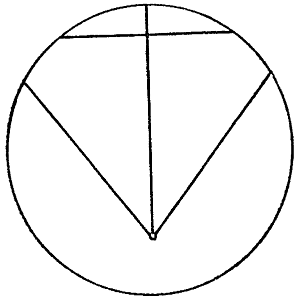

Рис. 120

они расходятся в одну сторону, а в другую асимптотически сближаются. Такие прямые изображаются хордами, у которых один конец общий (он не принадлежит прямым, так как они изображаются хордами с исключенными концами). Такие прямые называются в геометрии Лобачевского параллельными, параллельными в ту сторону, где они сближаются.

4. Из сказанного в 3 следует, что, никакие две прямые не располагаются на постоянном расстоянии друг от друга. Линия, проходящая на постоянном расстоянии от прямой,— кривая, выпуклая; она называется эквидистантой. При сдвиге вдоль прямой точки плоскости, не лежащие на этой прямой, перемещаются по эквидистантам.

5. Сумма углов треугольника не равна π; она всегда меньше на величину, пропорциональную площади треугольника: $\alpha+\beta+\gamma=\pi-k^2S$, где k зависит от единицы измерения длины.

6. Не существует треугольников сколь угодно большой площади (это уже следует из предыдущего: так как $\alpha+\beta+\gamma>0$, то $k^2S<\pi$, $S<\frac{\pi}{k^2}$).

7. Нет подобных треугольников; если у двух треугольников углы равны, то треугольники равны. Поэтому существует «абсолютная» единица длины определяемая самой геометрией, например сторона равностороннего треугольника с суммой углов $\pi/2$.

8. Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растет быстрее:

$$l = \frac{\pi}{k}\left(e^{kr} - e^{-kr}\right) = 2\pi \frac{1}{k} \operatorname{sh} kr,$$

где k — постоянная, указанная выше, kr — безразмерная величина и sh обозначает гиперболический синус.

9. Предел бесконечно растущей окружности не есть прямая, а особая кривая, называемая орициклом (или предельной окружностью).

10. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит либо окружность, либо орицикл, либо эквидистанта.

Геометрия Лобачевского связана с евклидовой тем, что во всякой достаточно малой области на плоскости Лобачевского приближенно выполняется геометрия Евклида, тем точнее, чем меньше область. Если за такую область взять круг радиуса r, то относительное отклонение от соотношений евклидовой геометрии будет порядка $(kr)^2$, как в формулах для суммы углов треугольника и длины окружности (убедитесь из разложения в ряд).

ГЛАВА 7

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА

§ 41. Аксиомы стереометрии

В планиметрии плоскость включает все рассматриваемые фигуры и в этом смысле представляет собой то пространство, где имеет место изучаемая геометрия. В стереометрии же плоскость оказывается фигурой в пространстве, которое содержит много плоскостей, и на всех выполняется планиметрия. Это и можно положить в основу стереометрии, приняв как аксиому:

Плоскость есть фигура, на которой выполняется планиметрия.

Это подразумевает, во-первых, что мы принимаем аксиомы фигуры вместе с основными понятиями: «точка», «фигура», «принадлежит». Далее, в число основных понятий включается «плоскость», и, наконец, подразумевается, что планиметрия нам известна. Какие понятия и аксиомы из возможных кладутся при этом в ее основание — безразлично, в частности, это может быть любая из аксиоматик, изложенных в гл. 6 (можно также принять за основу числовую модель планиметрии, изложенную в § 30). Во всяком случае мы считаем, что на каждой плоскости определены, как фигуры, отрезки и прямые, и отношение равенства отрезков. Этими понятиями мы и воспользуемся, формулируя аксиомы стереометрии (а являются ли эти понятия основными в построении планиметрии — это, как сказано, не существенно).

При этом имеется в виду, что понятие равенства отрезков определено не только на каждой плоскости, но и для отрезков, лежащих на разных плоскостях. Что же касается самих отрезков и прямых, то их достаточно предположить определенными на каждой плоскости в отдельности, так что фигура, являющаяся, скажем, прямой на одной плоскости, априори не обязана быть прямой на другой плоскости, хотя бы та ее и содержала. То, что это не так, т. е. что фигура, являющаяся прямой (или отрезком) на одной плоскости, будет прямой (или отрезком) на всякой другой содержащей ее плоскости, последует из принятых аксиом [1]).

Аксиомы стереометрии. Они открываются уже высказанной аксиомой плоскости.

С0. *Плоскость есть фигура, на которой выполняется планиметрия.*

С1. *Для каждых трех точек существует содержащая их плоскость* (короче, через каждые три точки проходит плоскость).

С2. *Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.*

С3. *Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение является прямой на них обеих.*

С4. *Два отрезка, равные третьему, равны.*

На этом система аксиом стереометрии кончается. Она незамкнута, поскольку в ней предполагается известной планиметрия (в этом ее можно сравнить с системой аксиом, в которой предполагается известным понятие вещественного числа).

Сделаем из высказанных аксиом основные выводы.

Из аксиомы С3 непосредственно следует, что фигура, являющаяся прямой на одной плоскости, оказывается прямой и на всякой другой плоскости, в которой она содержится. Тем самым прямую можно рассматривать саму по себе независимо от содержащих ее плоскостей. То же, очевидно, верно и для отрезков. Далее, выполняется

Теорема 1. *Через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Доказательство. Пусть A, B — две данные точки. По аксиоме С2 есть еще точки; возьмем одну из них C. По аксиоме С1 через три точки A, B, C проходит плоскость. На этой плоскости α, как следует из аксиомы С0, существует прямая, проходящая через точки A, B. Таким образом, существование прямой, проходящей через две данные точки, доказано.

Докажем ее единственность.

Допустим, точки A, B принадлежат, кроме полученной прямой a, еще другой фигуре b, являющейся прямой на

[1]) Рассмотрим, например, параболический цилиндр; его можно получить изгибанием плоскости, так что его внутренняя геометрия — та же, что у плоскости: на нем имеет место планиметрия. Пересечение его с плоскостью, перпендикулярной его образующим, представляет на плоскости параболу, но на нем самом, в смысле его внутренней геометрии,— прямую.

некоторой плоскости β. Плоскости α, β различны, так как согласно аксиоме С0 на одной плоскости есть только одна прямая AB. Вместе с тем плоскости α, β имеют общие точки A, B, и потому, согласно аксиоме С3, их пересечение является прямой на них обеих. Эта прямая проходит через точки A, B, а потому, в силу аксиомы С0, с нею должны совпадать прямые a и b. Тем самым прямая b совпадает с a, так что прямая a — единственная, проходящая через точки A, B.

Теорема 2. *Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она содержится в ней.*

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A, B. Через них, согласно аксиоме СО, проходит прямая в плоскость α. Но по теореме 1 прямая, проходящая через точки A, B, только одна. Стало быть, она и лежит в α, что и требовалось доказать.

Для отрезков выполняются утверждения, аналогичные теоремам 1, 2.

Каждые две точки соединимы отрезком, и притом только одним.

Если отрезок имеет с плоскостью две общие точки, то он в ней содержится.

Оба эти утверждения, очевидно, вытекают из теорем 1, 2, поскольку отрезок AB — это часть прямой AB.

Теорема 3. *Вдоль любого отрезка от данного его конца можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*

Доказательство. Сказанное в теореме верно в планиметрии, т. е. если данный отрезок AB и другой c, равный которому мы хотим отложить вдоль AB от конца A, лежат в одной плоскости. Но допустим, что отрезок AB лежит в плоскости α, а отрезок c — в другой плоскости β.

Через концы отрезка c и точку A проходит плоскость (по аксиоме С1). По аксиоме С3, эта плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым; обозначим их a и b ($a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma$). На прямой a лежит точка A; прямая b содержит отрезок c (по следствию теорем 1, 2).

Так как отрезок c и прямая a лежат в одной плоскости γ, а на ней выполняется планиметрия, то на прямой a можно отложить отрезок c_1, равный c. Отрезок c_1 вместе с прямой a содержится в плоскости α, где лежит данный отрезок AB. Поэтому вдоль отрезка AB можно отложить отрезок AC, равный c_1. Но отрезок c_1 равен данному c. Поэтому, в силу аксиомы С4, отрезок AC тоже равен c. Теорема доказана.

Приняв какой-либо отрезок e за масштаб измерения длин, мы можем, ссылаясь на доказанную теорему, перенести его на любую плоскость и таким образом ввести на всех плоскостях один и тот же масштаб длин. Пользуясь им, можно построить в каждой плоскости прямоугольные координаты, и ввиду равенства масштабов любое построение, осуществленное в одной плоскости, можно перенести на другую. В частности, можно в разных плоскостях строить углы, равные данному. В общем, фигуры на разных плоскостях сравниваются так же, как на одной.

Установим еще два свойства плоскости как фигуры в пространстве.

Теорема 4. *Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

Доказательство. Пусть A, B, C — точки, не лежащие на одной прямой. Через них по аксиоме С1 проходит плоскость. Эта плоскость α только одна. Всякая другая плоскость β, имеющая с α общие точки, пересекает α по прямой (аксиома С3). Стало быть, она не может иметь с α общих точек, не лежащих на одной прямой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.*

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.*

Оба следствия выводятся из теоремы 4 с использованием теоремы 2.

Теорема 5. *Всякая плоскость α делит все не принадлежащие ей точки на два таких класса, что отрезок, соединяющий точки одного класса, не пересекает α, а отрезок, соединяющий точки разных классов, пересекает α.*

Доказательство. Пусть α — данная плоскость. Берем какую-либо точку A, не принадлежащую α, и относим в класс K_1 все такие точки X, что отрезок AX не имеет с α общих точек; все остальные точки, не принадлежащие α, относим в класс K_2.

Возьмем две точки B, C отличные от A и не лежащие в плоскости α (аксиома С2). Через точки A, B, C проходит плоскость β (аксиома С1). Отрезки AB, AC, BC лежат в β (следствие теорем 1, 2). Если плоскость β не имеет с α общих точек, то, очевидно, B, $C \in K_1$ и отрезок BC не имеет с α общих точек.

Допустим, плоскости α и β имеют общую точку. Тогда по аксиоме С3 они пересекаются по прямой. Эта прямая a делит плоскость β на две (открытые) полуплоскости (в силу аксиомы С0). Из определения классов K_1, K_2 ясно, что точки одной из этих полуплоскостей входят в K_1, точки другой — в K_2. По свойству полуплоскостей, если точки B, C принадлежат одной из них, то отрезок BC не пересекает прямую a, если же точки B, C принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок BC пересекает прямую a. А так как точки полуплоскостей содержатся в классах K_1, K_2 и $a \subset \alpha$, то и получаем сказанное в теореме: BC не пересекает α, если точки B, C из одного класса, и — пересекает, если точки из разных классов, что и требовалось доказать.

Фигура, содержащая все точки одного класса, а также точки самой плоскости α и никакие другие, называется полупространством, ограниченным плоскостью α; без точек плоскости α — это «открытое полупространство». (Определение это отвечает требованию аксиом фигуры, поскольку принадлежит точка M данному классу или нет проверяется проведением отрезка AM.)

Поскольку планиметрия считается известной, наши аксиомы С0—С4 вместе с теоремами 1—5 составляют основание для построения стереометрии на элементарном уровне[1]), за исключением учения об объемах, которое по существу не элементарно (см. гл. 8). Для пространственных фигур можно дать определения и выводы, аналогичные тем, какие даны для плоских фигур в § 21, 22. (Скажем, внутренность пирамиды можно определить, подобно внутренности треугольника, соединяя отрезками вершину с точками основания.) Но оставим это читателю.

Замечание. Достоинство изложенной здесь аксиоматики из пяти аксиом С0—С4 состоит, во-первых, в ее краткости, обусловленной, понятно, тем, что основания планиметрии заключены в одну аксиому. Во-вторых, что не менее важно, здесь совершенно безразлично, какое основание планиметрии имеется в виду. Это чрезвычайно

---

[1]) Такое изложение стереометрии можно найти в книге: Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 9—10: Учебное пособие для школ и классов с углубленным изучением математики.— М.: Просвещение, 1984.

удобно, в частности, с точки зрения преподавания, когда изучают спачала планиметрию, а потом стереометрию.

Об аксиоме С4 — о равенстве отрезков. Если воспользоваться понятием длины отрезка или, что равносильно, расстояния между точками, то аксиому С4 можно заменить следующей.

С4*. *Если две точки A, B лежат как на одной плоскости α, так и на другой β, то расстояние AB одно и то же на обеих плоскостях.*

По аксиоме С3 отрезок AB будет один и тот же на плоскостях α, β, так что аксиома С4* дополняет это утверждение тем, что и длина его одна и та же на этих плоскостях. (Априори этого могло бы и не быть; можно представить себе, что на разных плоскостях отрезки измеряются по-разному.)

Из такой аксиомы теорема 3 об откладывании отрезка доказывается совершенно так же, как это было сделано выше, поскольку в доказательстве использовался отрезок в пересечении двух плоскостей.

Поскольку планиметрия считается известной, вполне можно воспользоваться понятием длины отрезка (на плоскости) и ввести аксиому С4*; она представляется совершенно естественной.

§ 42. Основания стереометрии в другом изложении

Аксиоматика стереометрии, изложенная в предыдущем параграфе, содержит аксиому С0, по которой на каждой плоскости выполняется планиметрия, так что отрезки (и прямые) предполагаются лежащими в плоскостях. Но если не предполагать заранее планиметрию известной, то естественно считать отрезки (и прямые) фигурами в пространстве и формулировать такие аксиомы, из которых получалось бы, что на плоскостях выполняется планиметрия. Так обычно и излагают аксиоматику стереометрии. Дадим такое изложение.

Аксиоматика стереометрии. Основные понятия.

Основные объекты: 1) *точки*, 2) *фигуры*, 3) *отрезки*, 4) *плоскости*.

Основные отношения: 1) точка *принадлежит* фигуре, 2) точка *служит концом* отрезка, 3) отрезки *равны*.

Аксиомы стереометрии. Они составляются из четырех групп: 1) аксиомы фигуры, 2) линейные аксиомы — об отрезках, 3) плоскостные аксиомы — о каждой плоскости, 4) пространственные аксиомы (аналогичные предыдущим аксиомам С1, С2, С3).

Аксиомы фигуры — те же, что раньше (§ 10). Имея их в виду мы присоединяем к линейным и плоскостным аксиомам две: (1) отрезок есть фигура, (2) плоскость есть фигура.

Эти две аксиомы делают лишними особые отношения принадлежности точек отрезкам и плоскостям.

Линейные аксиомы дословно повторяют линейные аксиомы планиметрии (с включением требования: концы отрезка принадлежат ему; о точках, принадлежащих отрезку, но не являющихся его концами, говорим, что они лежат на отрезке).

Плоскостные аксиомы повторяют плоскостные аксиомы планиметрии с той лишь разницей, что теперь к каждой из них надо добавлять указание, что она относится к каждой плоскости. (Исключение можно сделать для аксиомы параллельных отрезков: ее достаточно требовать хотя бы для одной плоскости.)

Пространственные аксиомы. Они аналогичны аксиомам С1, С2, С3 предыдущего параграфа; мы обозначаем их Пр1, Пр2, Пр3 (Пр — пространственные).

Пр1. *Через каждые три точки проходит плоскость.*

Пр2. *Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Пр3. *Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение представляет собой прямую.* (Прямая определяется через отрезки, как это сделано в гл. 3.)

Аксиома Пр3 отличается от С3 тем, что теперь прямая определена в пространстве и заранее не известно, лежит ли всякая прямая в какой-либо плоскости; но это будет доказано. Вообще, мы докажем, что данная аксиоматика равносильна предыдущей (с аксиомами С0—С4).

Аксиома о равенстве отрезков, аналогичная С4, здесь отсутствует, так как она содержится теперь среди линейных аксиом.

Так как линейные аксиомы тут те же, что в планиметрии, то можно воспользоваться всеми выводами из них, полученными в гл. 3. В частности:

Теорема 1. *Через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Теперь докажем

Теорема 2. *Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она содержится в ней.*

Доказательство. Пусть две точки A, B прямой a лежат в плоскости α. К точкам A, B можно присоединить какую-нибудь точку C, не лежащую в α (как это следует из аксиомы Пр2). Через точки A, B, C проходит плоскость β (аксиома Пр1). По аксиоме Пр3 плоскости α и β пересекаются по прямой. Эта прямая содержит точки A, B, но по теореме 1 через две точки проходит только одна прямая. Это, стало быть, и есть данная прямая a, и она лежит в плоскости α, что и требовалось доказать.

Из теорем 1 и 2, очевидно, вытекает

Следствие. *Во всякой плоскости каждые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним.*

Вместе с линейными и плоскостными аксиомами это приводит к выводу:

На каждой плоскости выполняется планиметрия.

Таким образом, изложенные здесь аксиомы влекут аксиомы предыдущего параграфа. Обратное — что из тех аксиом следуют изложенные здесь — тоже верно. Потому что, как там показано, и при той аксиоматике прямые и отрезки можно рассматривать независимо от какой бы то ни было содержащей их плоскости. Тем самым линейные аксиомы выполняются в пространстве. Так мы приходим к выводу:

Системы аксиом стереометрии, представленные здесь и в предыдущем параграфе, равносильны.

Замечание об аксиомах Пр1 и С1. Эти аксиомы одинаково требуют, чтобы через любые три точки проходила плоскость. Обычно же формулируют другую аксиому:

Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Последняя часть аксиомы лишняя, так как она содержится в теореме 3 предыдущего параграфа. Что же касается первой части, то нашу аксиому Пр1 (С1) нельзя заменить такой, по которой плоскость проходит через любые три точки, не лежащие на одной прямой.

Действительно, по аксиоме Пр2 (С2) существуют 4 точки, не лежащие в одной плоскости, но они могут лежать на одной прямой, и существование хотя бы одной плоскости не обеспечено! Плоскостей может не быть вовсе, хотя аксиомы о них формально выполняются[1]).

В противоположность этому аксиому С1 можно заменить такой, по которой плоскость проходит через три точки, не лежащие на одной прямой, просто потому, что если точки лежат на одной прямой, то они тем самым лежат на плоскости, потому что в том варианте аксиоматики прямая — это прямая на плоскости.

Замечание. Приняв плоскость за основной объект стереометрии, мы покинули ту почву практики, на которой основывались аксиомы планиметрии. Мы не начинаем с построения плоскости. Плоскость мыслится бесконечно простирающейся во все стороны, как она и понимается в планиметрии. Хотя о плоскости там не говорится, но все построения и выводы относятся к фигурам на плоскости и, чтобы они не встречали ограничений, плоскость мыслится как неограниченная. Поэтому если мы принимаем планиметрию как уже известную, то мы, естественно, должны принять плоскости в пространстве во всем их бесконечном протяжении, не думая о возможности построения их бесконечных моделей.

Основания стереометрии можно изложить и не принимая плоскость в качестве основного объекта, а исходя из идеализированного представления реальных пространственных построений, например протягивания веревок, как о том было сказано еще в гл. 1. Наметим такое изложение. Плоскость исключается из основных объектов и, соответственно, плоскостные аксиомы заменяются другими, хотя во многом сходными. Первую и основную из них можно сформулировать так.

А. *Луч, идущий из вершины угла и пересекающий одну какую-нибудь его поперечину, пересекает и всякую другую*[2]).

---

[1]) Избежать этого можно, дополнив аксиому Пр2, потребовав в ней: существуют четыре точки, не лежащие ни на одной плоскости, ни на одной прямой. Тогда есть 3 точки, не лежащие на одной прямой (что легко доказывается из того, что через две точки проходит только одна прямая). Можно также принять как отдельную аксиому, что существуют 3 точки, не лежащие на одной прямой. Такая аксиома относится к плоскости в § 35; но теперь ее нужно отнести к пространству.

[2]) Эта формулировка упрощена. В более сильной форме эту аксиому можно выразить так, чтобы была видна ее связь с аксиомой Паша: если точка D лежит на продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C, то луч, идущий из D и пересекающий AC,

Отсюда следует, что отрезки, соединяющие вершину треугольника с точками противоположной стороны, образуют одну и ту же фигуру, независимо от того, из какой вершины они проводятся. Эта фигура — не что иное, как «кусок плоскости» — плоский треугольник с внутренностью. Отрезки, соединяющие любые пары его точек, в нем содержатся в силу той же аксиомы А, и каждый такой отрезок заключается в отрезке, концы которого принадлежат сторонам треугольника. Такой отрезок делит плоский треугольник на две части; одна «с одной стороны» от данного отрезка, другая — «с другой».

Любой плоский треугольник ABC можно расширить — заключить в больший. Проведя от какой-либо точки M на стороне BC через вершину A отрезок MA_1, получаем точку A_1; аналогично берем точки B_1, C_1. Плоский треугольник $A_1B_1C_1$ будет содержать треугольник ABC (опять же по аксиоме А). Плоскость можно определить как объединение расширяющихся «кусков», но в основаниях стереометрии можно обойтись без нее.

Для кусков плоскости требуются следующие аксиомы.

1) Аксиома откладывания угла; или проще, аксиома существования треугольника. Пусть дан треугольник ABC и на данном «куске» отрезок A_1B_1, равный AB. Тогда на этом куске или на содержащем его куске по данную сторону от отрезка A_1B_1 найдется такая точка C_1, что $A_1C_1 = AC$, $A_1B_1 = AB$.

2) Следующая затем аксиома о треугольнике (аксиома V_4 в § 34) не изменяется, поскольку в ней треугольники рассматриваются сами по себе вне связи с какой-либо плоскостью.

3) Аксиома параллельных отрезков — без изменения.

Из пространственных аксиом остаются только две.

1. Существуют четыре точки, не принадлежащие никакому куску плоскости.

2. Если у двух кусков плоскости есть общая внутренняя для них точка, то есть и вторая. (То, что есть общий отрезок, отсюда уже следует.)

Аксиома о том, что через три точки проходит плоскость, отпадает, поскольку кусок плоскости строится.

пересекает также AB. Хотя вся эта фигура рассматривается в пространстве, она сама собой заключается в плоскости (ABC), так как точка D лежит на прямой BC. Наглядный, практический смысл аксиомы очевиден, если представить себе, например, жердь, накладываемую на AC и AB.

§ 43. Пространственные аксиомы Гильберта

Излагая в § 35 аксиоматику геометрии по Гильберту, мы опустили пространственные аксиомы. Теперь мы приведем эти аксиомы. В изложении Гильберта — это пять аксиом 1-й группы — аксиом связи или принадлежности от 4-й до 8-й; мы обозначим их ПрГ1, ПрГ2 и т. д.— «пространственные Гильберта» [1]).

ПрГ1. *Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой, существует плоскость α, принадлежащая каждой из трех точек A, B, C. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.*

ПрГ2. *Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, принадлежащей этим точкам.*

ПрГ3. *Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка прямой a лежит в плоскости α.*

И в этом случае мы говорим: прямая лежит в плоскости α.

ПрГ4. *Если две плоскости α, β имеют общую точку A, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B.*

ПрГ5. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие на одной плоскости.*

К этому нужно добавить в качестве еще одной пространственной аксиомы то, что составит у Гильберта вторую часть его аксиомы I_3:

ПрГ6. *Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.* (Первая часть аксиомы I_3 требует: «на каждой прямой существуют по крайней мере две точки».)

Гильберт называет свои аксиомы I_1—I_3, которые были приведены в § 32, «плоскостными», а аксиомы I_4—I_8 — «пространственными». Но вторая часть аксиомы I_3 на самом деле относится к пространственным аксиомам, если аксиомы планиметрии не выделять отдельно, как мы сделали в § 32. Действительно, без аксиомы ПрГ6 не обеспечено существование хотя бы одной плоскости, поскольку аксиома ПрГ1 требует, чтобы плоскость проходила не через любые три точки, а через три, не лежащие на одной прямой.

---

[1]) Вводя пространственные аксиомы, нужно соответственно пересказать аксиомы, говорящие о фигурах на плоскости, отнеся их явно к любой из плоскостей.

Обратим еще внимание на то, что Гильберт формулирует как особую аксиому ПрГ2, что через три точки, не лежащие на одной прямой, может проходить только одна плоскость. Между тем мы доказали это как теорему. Пользуясь аксиомами Гильберта за вычетом ПрГ2, нетрудно доказать, что если у двух плоскостей есть три общие точки, не лежащие на одной прямой, то все точки у них общие[1]. Но у Гильберта же вовсе не предполагается, что плоскость как фигура определяется своими точками (что она является множеством точек)! У Гильберта плоскость — это лишь мыслимый объект, который может находиться в отношении взаимной принадлежности с точками. И ничего больше! Но аксиома ПрГ2 выражает, что плоскость задается, определяется тремя своими точками, не лежащими на одной прямой.

Совершенно такой же смысл имеет у Гильберта аксиома, что через две точки проходит не более одной прямой: прямая есть «вещь», которая задается любыми двумя принадлежащими ей точками.

То, что у Гильберта прямая не мыслится как фигура, определяемая своими точками, ясно видно из аксиомы ПрГ3, где говорится, что если две точки прямой принадлежат плоскости α, то все ее точки принадлежат той же плоскости, но вовсе не говорится, что тогда прямая лежит в плоскости. Это последнее выражение только потом определяется тем, что точки прямой лежат в плоскости. Впрочем, здесь эта точка зрения Гильберта ничего не меняет, но в отношении плоскости она привела к необходимости формулировать аксиому о единственности плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

О точках на плоскости. По второй части аксиомы ПрГ1 на всякой плоскости есть по крайней мере одна точка. Однако для планиметрии нужно, чтобы на плоскости существовали по крайней мере три точки. Без двух

---

[1]) Пусть у плоскостей α, β есть общие точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Тогда точки прямых AB, AC лежат на обеих плоскостях (по аксиоме ПрГ3). Если теперь M — точка плоскости α, не лежащая на этих прямых, то через нее можно провести прямую, пересекающую обе прямые AB, AC (не в точке A). Эта прямая, а значит, и точка M лежат на плоскости β. Значит, всякая точка плоскости α принадлежит β. А меняя ролями эти плоскости, получаем, что и каждая точка плоскости β принадлежит α. То есть все точки у них общие.

точек не обеспечено существование на плоскости хотя бы одной прямой (или отрезка), без трех — не обеспечено существование угла, не имеет смысла ни аксиома Паша, ни аксиома деления плоскости... В аксиоматике, изложенной в § 42, по аксиоме V_1 § 34, на плоскости есть по крайней мере три точки. Но присоединяя пространственные аксиомы, достаточно требовать, как у Гильберта, существование хотя бы одной точки. Итак, мы докажем:

Если на плоскости есть хотя бы одна точка, то при аксиомах Гильберта, как и при аксиомах стереометрии § 41, *на плоскости есть три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство проведем, ссылаясь на аксиомы Гильберта.

Пусть на плоскости α есть точка A. Возьмем еще точку M и точку N, не лежащую на прямой AM (по аксиоме 6 это возможно). Если точки M, N лежат на плоскости α, то уже имеем то, что требуется. Допустим, это не так. Тогда плоскость β, проходящая по аксиоме 1 через точки A, M, N, отлична от α. Так как у α и β есть общая точка A, то есть еще общая точка B (аксиома 4). Прямая AB лежит на β (по аксиоме 3). А так как на β есть точки A, M, N, не лежащие на одной прямой, то на β есть точка C, не лежащая на AB.

По аксиоме 5 есть точка D, не лежащая на β и, значит, не лежащая на одной прямой с точками A, C (в силу аксиомы 3). Поэтому через точки A, C, D проходит плоскость γ (аксиома 1). Она имеет с α общую точку A и, стало быть,— еще хотя бы одную общую точку E (аксиома 4). Эта точка не лежит на прямой AB (иначе плоскость γ проходила бы через A, B и C и по аксиоме 2 совпадала бы с β, хотя ее точка D не лежит на β).

Таким образом, на плоскости α есть точки A, B, E, не лежащие на одной прямой, что и требовалось доказать.

Доказательство со ссылками на аксиомы § 42 и теорему 4 § 41 читатель проведет сам.

§ 44. Общее понятие евклидова пространства

Пространственная аксиома о четырех точках, не лежащих в одной плоскости, устанавливает, что пространство не сводится к плоскости; оно имеет по крайней мере три измерения: проведя плоскость через три точки, можно через четвертую точку провести прямую, выходящую из этой плоскости, так сказать, в третье измерение.

Аксиома о пересечении двух плоскостей, напротив, ограничивает число измерений: оно не больше трех. Можно сказать, что у двух плоскостей вместе четыре измерения, но одно поглощается тем, что плоскости пересекаются по прямой. Если ослабить эту аксиому, то мы получим аксиоматику евклидова пространства любого числа измерений (даже бесконечного). Проще всего ее изложить так же, как изложена аксиоматика стереометрии в § 41.

Аксиоматика евклидова пространства. Мы принимаем те же понятия, какие приняты в аксиоматике стереометрии § 41, и, так же как там, принимаем аксиомы фигуры. Формулируем сами аксиомы евклидова пространства, они те же, что аксиомы в § 41, с одним отличием в аксиоме о пересечении плоскостей.

Е0. *Плоскость есть фигура, на которой выполняется планиметрия.*

Е1. *Через каждые три точки проходит плоскость.*

Е2. *Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Е3. *Если две плоскости имеют две общие точки, то их пересечение является прямой на них обеих.*

Е4. *Два отрезка, равные третьему, равны.*

Аксиома Е3 в отличие от С3 не запрещает, что две плоскости могут иметь только одну общую точку. Но из аксиомы Е3, так же как из С3, следует, что фигура, являющаяся прямой на одной плоскости, будет прямой на всякой другой содержащей ее плоскости. Тем самым прямые, а вместе с ними и отрезки, можно рассматривать как фигуры в пространстве независимо от содержащих их плоскостей.

Буквально так же, как в § 41, доказываются установленные там теоремы 1, 2 о прямой, теорема 3 об откладывании отрезка, теорема 4 о плоскости.

Аксиомы Е0—Е4 не ограничивают числа измерений; его нужно ограничить особой аксиомой, например, такой:

Е5 (аксиома размерности). *Существуют n, и не более, взаимно перпендикулярных прямых.*

Здесь имеются в виду пересекающиеся прямые, так что каждые две из них лежат в одной плоскости. Поэтому перпендикулярность их понимается в обычном смысле.

Все сказанное можно суммировать в виде **определения**:

Евклидовым пространством называется множество элементов — «точек», в котором выделены некоторые подмножества — «плоскости» и «отрезки» — и определено равенство отрезков, причем выполняются аксиомы E0—E4. *Пространство к тому же называется n-мерным, если выполнена аксиома* E5.

С помощью взаимно перпендикулярных прямых можно ввести в n-мерном пространстве прямоугольные координаты аналогично тому, как это делается в трехмерном пространстве. В n-мерном пространстве каждая точка характеризуется n координатами $x_1, \ldots, x_n$ и каждой последовательности n чисел отвечает точка с такими координатами. Каждой паре точек $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$ сопоставляется число — «расстояние»

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}. \tag{1}$$

Основные понятия аксиоматики евклидова пространства определяются через это расстояние.

Точка M лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда

$$|AM| + |BM| = |AB|. \tag{2}$$

Другими словами, отрезок с концами A, B есть множество точек M с условием (2), с присоединением концов A, B. Прямая AB определяется как объединение всех отрезков, содержащих точки A, B. Плоскость можно определить как фигуру, образуемую всеми прямыми, каждая из которых пересекает две пересекающиеся прямые в двух точках.

Само по себе расстояние, выражаемое формулой (1), не имеет геометрического смысла, так как зависит от выбора единичного отрезка на осях координат. Но при переходе к любым другим прямоугольным координатам все численные расстояния (1) умножаются на один и тот же положительный множитель. Поэтому геометрический смысл имеют однородные соотношения между расстояниями, сохраняющиеся при умножении всех расстояний на один и тот же положительный множитель, как, например, равенство (2).

Все это позволяет дать следующее чисто аналитическое определение n-мерного евклидова пространства.

Определение. *Пространство называется n-мерным евклидовым, если:*

(1) *между его точками и последовательностями по n чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть взаимно однозначное соответствие* (точкой можно считать саму такую последовательность);

(2) *каждой паре точек $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$ отнесено число — «расстояние» — по формуле* (1);

(3) *геометрическим считается всякое свойство, выражаемое через отношение расстояний или, что равносильно, сохраняющееся при умножении всех расстояний на одно и то же положительное число.*

Выполняется следующая основная теорема о евклидовом пространстве.

Данное аналитическое определение n-мерного евклидова пространства равносильно аксиоматическому. Другими словами, всякая реализация аксиом n-мерного евклидова пространства изоморфна евклидову пространству в его аналитическом определении.

В этой теореме заключено два важнейших вывода.

1) *Аксиоматика n-мерного евклидова пространства непротиворечива*, раз существует ее реализация,— непротиворечива настолько, насколько непротиворечива теория вещественных чисел.

2) *Аксиоматика n-мерного евклидова пространства полная*: все ее реализации изоморфны. Или, другими словами, при каждом данном n n-мерное евклидово пространство единственно с точностью до изоморфизма.

§ 45. Другие геометрии

Наряду с евклидовой геометрией, основы которой мы изучали, существуют и другие примыкающие к ней «геометрии»; из них мы пока рассмотрели кратко геометрию Лобачевского на плоскости. Теперь, в порядке дополнения, рассмотрим основы других геометрий, тесно связанных с евклидовой.

1. Геометрия в пространстве Лобачевского. Геометрия Лобачевского в пространстве строится на аксиоматике евклидовой геометрии с заменой аксиомы параллельных на противоположную — «аксиому Лобачевского»: через точку вне данной прямой проходит более одной прямой, параллельной данной, т. е. лежащей с ней в одной плоскости и не пересекающей ее. Таким образом, стереометрию (трехмерную геометрию) Лобачевского можно определить теми же аксиомами С0—С4 (§ 41) с той лишь разницей, что в аксиоме С0 нужно иметь в виду планиметрию Лобачевского. Точно так же задается n-мерная геометрия Лобачевского аксиомами § 44, имея в виду планиметрию Лобачевского.

Модель пространства Лобачевского можно определить аналогично модели на плоскости, рассмотренной в § 39, 40. Именно: в качестве пространства берется внутренность шара, прямыми считаются хорды (без концов), наложение определяется как отображение внутренности шара на себя, переводящее хорды в хорды. Равными считаются фигуры, отображаемые одна на другую этими наложениями. Ввиду данного определения прямых плоскостями будут плоские сечения внутренности шара, т. е. внутренности получающихся в этих сечениях кругов. Для n-мерной геометрии Лобачевского модель такая же, только нужно взять внутренность n-мерного шара.

2. Аффинная геометрия. Аффинную геометрию можно кратко определить как такую, которая отличается от евклидовой тем, что в ней определено равенство (и вообще отношение) только для параллельных отрезков и, конечно, для отрезков, лежащих на одной прямой; непараллельные же отрезки вообще несравнимы; вместе с этим

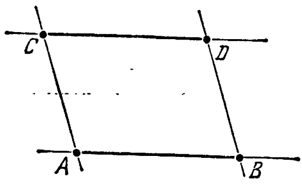

Рис. 121

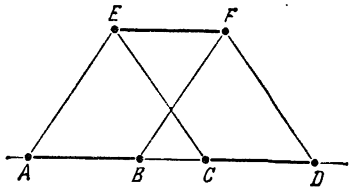

Рис. 122

отпадает и сравнение углов. Понятно, при этом наша аксиома параллельных отрезков теряет смысл и нужно принимать аксиому параллельных прямых. Равенство параллельных отрезков определяется тогда очень просто.

Отрезки AB, CD, лежащие на параллельных прямых, считаются равными, если через их концы проходят параллельные прямые, так что эти отрезки служат противоположными сторонами параллелограмма (рис. 121).

Заметим, если $AB \| CD$ и $AC \| BD$, то заведомо AD и BC пересекаются.

Отрезки AB, CD, лежащие на одной прямой, считаются равными, если существует отрезок EF, параллельный и равный им обоим в смысле только что данного определения (рис. 122).

Пользуясь этим определением, можно откладывать на прямой равные отрезки (рис. 123).

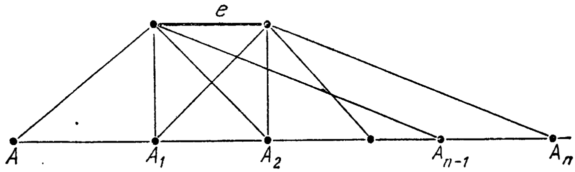

Рис. 123

Всякий отрезок AB можно разделить пополам, как в гл. 3, § 15 или, проще, построением, которое ясно из рис. 124: проводим через A прямые a, a_1 и через B — прямые b, b_1, $b \| a$, $b_1 \| a_1$, получаем параллелограмм $ADBC$, его диагональ CD пересекает AB в середине.

Когда откладывание равных отрезков на прямой и деление отрезка пополам установлены, можно ввести измерение отрезков и вслед за ним — координаты на любой данной прямой, совершенно так же, как это сделано в

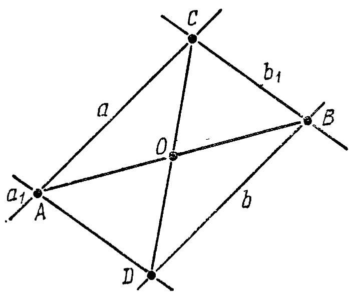

Рис. 124

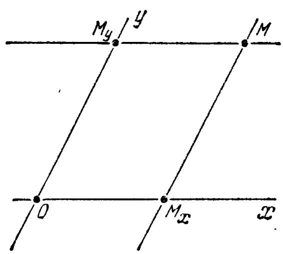

Рис. 125

гл. 3. Разница лишь в том, что на непараллельных прямых координаты вводятся независимо, поскольку отрезки на них несравнимы.

Далее, можно ввести координаты на плоскости. Через какую-либо точку O проводим две прямые и вводим на них координаты x, y с началом O; прямые становятся осями x и y. Любой точке M приписываем в качестве ее координат x_M, y_M координаты x, y тех точек M_x, M_y, в которых прямые, проведенные через M параллельно осям, пересекают оси (рис. 125). Точнее, если M не лежит на оси y, то M_x — это точка, в которой прямая, проведенная через M параллельно оси y, пересекает ось x, и x_M — это координата x точки M_x. Если же M лежит на оси y, то $M_x = O$ и $x_M = 0$. Аналогично определяется y_M.

Так введенные координаты называются аффинными или общими декартовыми.

Возвращаясь к определению равенства параллельных отрезков, можно заметить, что оно совпадает, можно сказать, с равенством векторов, поскольку было доказано, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если отрезки AB, CD служат противоположными сторонами параллелограмма $ABDC$. Но если где-то доказана транзитивность равенства векторов, то сейчас, определив равенство параллельных отрезков, мы не подумали убедиться в его транзитивности. Ее еще надо доказать! Иначе данное определение равенства лишается смысла. Вот тут-то, если употребить ненаучное выражение, и «зарыта собака».

Оказывается, что доказать транзитивность в рамках планиметрии невозможно; она выводится из аксиом только в пространстве, в планиметрии же ее приходится принять в качестве особой аксиомы.

Сформулируем теперь точное аксиоматическое определение аффинной геометрии.

Аффинной геометрией в пространстве называется теория, строящаяся на основе аксиоматики, получающейся из аксиоматики евклидовой геометрии с аксиомой параллельных прямых следующим образом.

1. *Отношение равенства (конгруэнтности) отрезков и углов и, соответственно, аксиомы, где это равенство фигурирует, исключаются, кроме аксиомы Архимеда, которая толкуется, как сказано дальше.*

2. *Принимается данное выше определение равенства отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых и, соответственно, понимается аксиома Архимеда, т. е. она относится к отрезкам на одной или на параллельных прямых.*

Пространство с аффинной геометрией называется аффинным.

Если же ограничиваться плоскостью, то, исключив аксиомы, говорящие о равенстве отрезков и углов и вве-

дя определение равенства параллельных отрезков, принимаем аксиому: это равенство транзитивно.

Согласно определению равенства это означает то, что указано на рис. 126, если $AB \| CD \| EF$ и $AC \| BD$, $CE \| DF$, то также $AE \| BF$.

Аксиоматика аффинной геометрии оказывается полной: все ее реализации изоморфны.

Из данного аксиоматического определения аффинной геометрии ясно, что ее можно рассматривать как особую главу евклидовой геометрии, в которую включаются только те результаты, которые не зависят от равенства отрезков на непараллельных прямых.

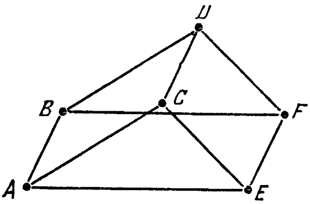

Рис. 126

Это равносильно определению аффинной геометрии, основанному на понятии аффинного преобразования (отображения).

Аффинным называется такое взаимно однозначное отображение плоскости или пространства на себя, которое переводит прямые в прямые (или более слабое требование: любым трем точкам, лежащим на одной прямой, сопоставляет три точки, тоже лежащие на одной прямой). При этом автоматически параллельные прямые переходят в параллельные. Потому что если прямые a и b не имеют общих точек, то их образы a', b' не могут иметь общих точек,— иначе отображение не было бы взаимно однозначным.

Аффинную геометрию можно определить как ту часть евклидовой геометрии, в которой рассматриваются те и только те свойства фигур, которые сохраняются при любых аффинных преобразованиях.

Основная теорема об аффинных преобразованиях утверждает: аффинные преобразования — это те и только те, которые представляются в декартовых (прямоугольных или общих — безразлично) координатах как линейные с определителем отличным от нуля; все равно — на плоскости или в пространстве любого числа измерений. В частности, на плоскости это преобразование сопоставляет каждой точке (x, y) точку (x', y') с координатами

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2,$$

с условием $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, Таким образом, аффинную геометрию можно определить аналитически. Пространство образуется всевозможными «точками» — наборами чисел-координат (x_1, ..., x_n),— и аффинным считается всякое свойство, которое сохраняется при любых линейных преобразованиях с определителем, отличным от нуля.

Первый случай, где выявляются аффинные свойства фигур, представляют кривые второго порядка. Их обычная классификация — это аффинная классификация: к одному классу относятся кривые, преобразуемые одна в другую аффинными преобразованиями, к разным классам относятся те, для которых такое преобразование невозможно. В частности, все эллипсы «аффинно эквивалентны» — преобразуемы друг в друга, в частности в окружность. Поэтому все аффинные свойства эллипсов такие же, как у окружности. Так что, установив какое-нибудь аффинное свойство окружности, мы можем его перенести на все эллипсы. Таким свойством является, например, то, что середины параллельных хорд лежат на прямой.

3. Проективная геометрия. Проективная геометрия возникла из изучения проектирования фигур на плоскость из какой-либо точки — центра проекции (рис. 127). При проектировании с плоскости P на плоскость P' из центра O точке $M \in P$ сопоставляется точка $M' \in P'$, в которой прямая OM пересекает плоскость P'. Предполагается, что плоскости P, P' не проходят через центр O.

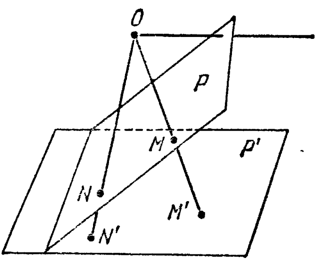

Рис. 127

Свойства плоских фигур, сохраняющиеся при проектировании, называются проективными; учение о них и составляет предмет проективной геометрии на плоскости. Однако тут есть существенная трудность. Она состоит в том, что прямая OM может оказаться параллельной плоскости P'. Тогда точка M' не существует: точка M не имеет проекции. Чтобы обойти это, считают, что такая прямая OM «пересекает» плоскость P', но только в «бесконечно удаленной точке».

Когда плоскость дополнена бесконечно удаленными точками, то между ее точками и прямыми, проходящими через центр проекции O, устанавливается взаимно однозначное соответствие. Множество всех прямых, проходящих через одну точку O, называется связкой прямых с центром O. Установленное взаимно однозначное соответствие точек дополненной плоскости и прямых связки позволяет рассматривать вместо дополненной плоскости связку прямых. Выгода состоит в том, что в связке все прямые равноправны, на плоскости же нужно еще условиться считать бесконечно удаленные точки равноправными с обычными и определить, в каком смысле они считаются равноправными.

Дадим теперь определение проективной геометрии.

Проективной геометрией называется аффинная геометрия связки прямых, когда прямые рассматриваются как элементы — точки этой геометрии — без всякого внимания к их внутренней структуре.

Если связка прямых — в трехмерном пространстве, то имеем проективную геометрию двух измерений — геометрию проективной плоскости. Связка прямых и представляет проективную плоскость: прямые связки — это точки проективной плоскости; плоскости, проходящие через центр связки — это прямые на проективной плоскости.

Проективное пространство n измерений представляется связкой в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве. Подчеркнем: оно представляется связкой, но не есть сама связка, так как в нем прямая связки выступает как точка, т. е. без всякой внутренней структуры.

Мы не будем дальше рассматривать проективную геометрию: она составляет особую область со своими существенными особенностями. Подчеркнем только, что данное здесь ее определение очень поучительно, давая пример того, как могут представляться объекты и отношения геометрии. Точки здесь представляют прямые, прямые представляют плоскости... Это может служить хорошей иллюстрацией к отвлеченному понятию геометрии, когда она относится к объектам «произвольной природы». В простейшей реализации проективной геометрии ее точки — это прямые связки. Но излагать аксиомы проективной геометрии мы не будем. Поскольку проективная геометрия определена как аффинная геометрия связки прямых, можно сказать, что ее предмет представляет свойства связки и фигур, составляемых из ее прямых, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях. Аффинное преобразование связки представляет вместе с тем то, что называют проективными преобразованиями проективного пространства (или плоскости), представленного связкой.

Проективная геометрия изучает проективные свойства фигур, т. е. свойства, сохраняющиеся при преобразовании проективного пространства (плоскости), переводящих его прямые в прямые. (Подчеркнем еще раз, что связка — это модель проективного пространства, в которой прямые связки трактуются как точки в отвлечении от их внутренней структуры).

4. Другие геометрии. Простейшую геометрию, в которой также можно откладывать отрезки и углы, как на плоскости, представляет геометрия на сфере, с тем исключением, что отрезки не могут быть «слишком большими»; «отрезок» — это дуга большой окружности, меньшая полуокружности. На сфере фигура допускает движение с той же степенью произвола, как на плоскости; говорят, что тут имеется «свободная подвижность» фигур.

Можно рассматривать n-мерную сферу в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве — фигуру, образованную точками, находящимися на данном расстоянии от одной точки — центра. Эта сфера может рассматриваться как n-мерное сферическое пространство...

Разных мыслимых и разрабатываемых в математике «геометрий» очень много. В их определении лежат некоторые общие принципы. Предмет той или иной геометрии представляет «пространство», обычно оно является топологическим пространством; геометрия может задаваться в нем, в частности, метрикой. Об этом было сказано в § 32.

Другой общий принцип представляет задание группы преобразований пространства, причем предмет соответствующей геометрии составляют свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях данной группы.

Все рассмотренные или кратко упомянутые нами геометрии — Евклида, Лобачевского, аффинная, проективная, сферическая — реализуют этот общий принцип: каждая из них изучает свойства, сохраняющиеся при преобразованиях соответствующей группы, как кратко говорят — инварианты этой группы. Явное аксиоматическое определение евклидовой геометрии с группой преобразований дано ее аксиоматикой с понятием наложения в § 36.

В основе важнейших общих геометрических теорий лежат и другие принципы.

§ 46. Векторное пространство и векторная аксиоматика евклидовой геометрии

Векторы евклидова пространства, рассматриваемые сами по себе вместе с операциями сложения и умножения на число, образуют «векторное пространство». Отвлекаясь от геометрического определения векторов, общее понятие векторного пространства определяют чисто алгебраически, и на этой основе дают аксиоматику евклидовой геометрии.

Векторным пространством называется множество каких-либо элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения и умножения на числа, удовлетворяющие обычным условиям. Другими словами, векторное пространство определяется двумя группами аксиом.

I. Аксиомы сложения.

I_1. *Каждым элементам* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *однозначно сопоставлен некоторый элемент* $\mathbf{c}$ — *их «сумма», что записывается* $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *или, что равносильно,* $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (так что $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$).

I_2. *Для всяких элементов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

I_3. *Существует такой элемент* θ — *нуль-вектор, что для всякого* $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}+\theta=\mathbf{a}.$$

I_4. *Для всякого элемента* $\mathbf{a}$ *существует «обратный»* $(-\mathbf{a})$, *т. е. такой, что*

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\theta.$$

Эти аксиомы выражают известные свойства сложения векторов. Переместительный закон сложения содержится в аксиоме I_1, так как в ее формулировке порядок элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ не играет роли: каждой паре элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ сопоставляется сумма ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ или $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ — одна и та же пара; но если бы имелась в виду упорядоченная пара $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, то надо было бы различать $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{a}$ и особо оговаривать переместительность $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$).

II. Аксиомы умножения на число.

II_1. *Всякому элементу* $\mathbf{a}$ *и всякому вещественному числу* λ *однозначно сопоставлен элемент, записываемый как* $\lambda\mathbf{a}$ *или, что равносильно,* $\mathbf{a}\lambda$.

II_2. *Для всяких* λ, μ *и* $\mathbf{a}$ $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$.

II_3. *Для всяких* λ, μ *и* $\mathbf{a}$ $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{a}$.

II_4. *Для всяких* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* λ $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

II_5. *Для всякого* $\mathbf{a}$ $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Эта аксиомы выражают известные нам свойства умножения векторов на число. Свойство, выраженное последней аксиомой II_5, для векторов особо не оговаривается, так как оно очевидно, но тут в качестве абстрактной аксиомы оно необходимо (можно было бы положить для всех λ и $\mathbf{a}$ $\lambda\mathbf{a}=\theta$ и аксиомы II_1—II_4 выполнялись бы).

Аксиомы сложения представляют собой не что иное, как аксиомы коммутативной группы в аддитивной записи, т. е. в такой, в которой групповая операция записывается как сложение. Тогда единица группы — элемент, нейтральный для умножения, представляется как нуль — элемент, нейтральный для сложения.

Из аксиом вытекает единственность нуль-вектора и обратного вектора.

Действительно, пусть θ и θ' — нулевые векторы. Тогда по определению, т. е. по аксиоме I_3,

$$\theta+\theta'=\theta, \quad \theta'+\theta=\theta'.$$

А так как по аксиоме I_1 $\theta+\theta'=\theta'+\theta$, то $\theta=\theta'$, т. е. θ и θ' — один и тот же вектор.

Аналогично пусть $(-\mathbf{a})$ и $(-\mathbf{a})'$ — два вектора, обратных какому-либо $\mathbf{a}$, так что

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\theta, \quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})'=\theta.$$

Из второго равенства, прибавляя $(-\mathbf{a})$, получим

$$(\mathbf{a}+(-\mathbf{a})')+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a}). \tag{1}$$

А пользуясь переместительностью и ассоциативностью (аксиомы I_1, I_2), получим

$$(\mathbf{a}+(-\mathbf{a})')+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+(\mathbf{a}+(-\mathbf{a})')=$$
$$=((-\mathbf{a})+\mathbf{a})+(-\mathbf{a})'.$$

А так как $(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\theta$, то выходит

$$(\mathbf{a}+(-\mathbf{a})')+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})'.$$

Отсюда и из (1) $(-\mathbf{a})'=(-\mathbf{a})$, что и требовалось доказать.

Разность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ определяется как такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{c}$. Прибавляя $(-\mathbf{a})$, находим, что

$$\mathbf{x}=\mathbf{c}+(-\mathbf{a}).$$

Тем самым разность существует для любых двух векторов и единственна. Принимается обычная запись: $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

Заметим еще, что $0\mathbf{a}=\theta$ — умножение на нуль дает нулевой вектор, и $-1\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{a}$ — умножение на -1 дает обратный вектор. В самом деле, по аксиоме II_5 $a=1\cdot a$ и, пользуясь также аксиомой II_3, получаем

$$\mathbf{a}+0\mathbf{a}=1\mathbf{a}+0\mathbf{a}=(1+0)\mathbf{a}=\mathbf{a},$$

тем самым $0\mathbf{a}=\theta$.

Теперь, пользуясь аксиомой II_5, затем II_3, получаем

$$-1\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}=-1\cdot\mathbf{a}+1\mathbf{a}=(-1+1)\mathbf{a}=0\mathbf{a}=\theta,$$

т. е. $-1\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

Линейная независимость векторов. Число измерений пространства. Векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются линейно независимыми или, короче, независимыми, если равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\theta$$

выполняется только при $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$. Если же такое равенство выполняется при каких-то $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не сплошь равных нулю, то векторы зависимы.

Числом измерений или разномерностью векторного пространства называется наибольшее число содержащихся в нем независимых векторов. Значит, если есть n независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, а всякие $n+1$ зависимы, то пространство n-мерно. В таком пространстве всякий вектор $\mathbf{x}$ выражается через эти векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Действительно, по условию векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, $\mathbf{x}$ (и их число $n+1$) зависимы, т. е.

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n+\lambda\mathbf{x}=\theta, \qquad (1)$$

где не все коэффициенты нули. Если бы было $\lambda=0$, то получалось бы, что сами векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ зависимы. А раз это не так, то $\lambda\neq 0$ и, деля на λ, получим из (1)

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_n\mathbf{a}_n,$$

т. е. любой вектор $\mathbf{x}$ выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Поэтому говорят, что векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ образуют базис пространства. Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно данного базиса.

Может быть и так, что наибольшего числа независимых векторов в данном пространстве нет, так что имеется сколь угодно много линейно независимых векторов, тогда размерность пространства бесконечна. Это не исключается, и как раз бесконечномерные векторные пространства играют в математике (в функциональном анализе) очень большую роль. В этих пространствах векторами являются функции (или классы функций). Например, непрерывные функции на промежутке $[0, 1]$. Сложение и умножение на число определено для них очевидным образом и также очевидно, что аксиомы I, II для них выполняются. Таким образом, эти функции образуют векторное пространство (очевидно, бесконечномерное).

Основной пример n-мерного векторного пространства представляет множество R_n всех упорядоченных наборов по n действительных чисел $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и т. п., для которых сложение и умножение на число определены «покоординатно»[1]), т. е.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_n)=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

В векторных пространствах с аксиомами I, II не определены ни длина вектора, ни углы между векторами. Оба эти понятия можно определить, введя скалярное произведение векторов, определяя его следующими аксиомами.

III. Аксиомы скалярного произведения.

III$_1$. *Для каждых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *однозначно определено вещественное число — их «скалярное произведение», обозначаемое* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *или, что равносильно*, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

III$_2$. *Для каждых* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

III$_3$. *Для каждых* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и числа* λ

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

III$_4$. *При* $\mathbf{a}\neq\theta$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}>0$ ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ обозначается $\mathbf{a}^2$, и $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ обозначается $|\mathbf{a}|$).

Векторное пространство, в котором введено скалярное умножение векторов с перечисленными аксиомами, называется *евклидовым векторным пространством* (бесконечномерное такое пространство называется также гильбертовым пространством).

[1]) Заметим, что набор $(x_1, \ldots, x_n)$ есть не что иное, как функция, заданная на отрезке натурального ряда $1, \ldots, n$. Поэтому данный пример представляет частный случай общего векторного пространства функций, заданных на каком-либо множестве.

В этом пространстве длину (модуль) вектора **a** определяют равенством:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Угол $\varphi \in [0, \pi]$ между ненулевыми векторами **a**, **b** определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Это определение возможно, так как всегда $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

Действительно, при любых векторах **a**, **b** и любом числе ξ по аксиоме III_4, если $\mathbf{a}\xi + \mathbf{b} \neq \theta$, то $(\mathbf{a}\xi + \mathbf{b})^2 > 0$. То есть

$$\mathbf{a}^2\xi^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\xi + \mathbf{b}^2 > 0.$$

Это значит, что стоящий слева трехчлен не имеет вещественных корней, так что

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 < \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Тем самым, если $\mathbf{a}\xi + \mathbf{b} \neq \theta$ при любом ξ, то

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| < |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

Если же при некотором ξ $\mathbf{a}\xi + \mathbf{b} = \theta$, то

$$\mathbf{a}^2\xi = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\xi = -\mathbf{b}^2,$$

откуда $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

Итак, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 < \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$, если векторы **a**, **b** независимы; если же они зависимы, то $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$. В первом случае $0 < \varphi < \pi$, во втором $\varphi = 0$ или π.

Векторная аксиоматика аффинного и евклидова пространства[1]. Пользуясь понятием векторного пространства, можно определить аффинное и евклидово пространства.

Аффинным пространством называется множество каких-либо элементов — точек, которое связано с некоторым векторным пространством (с аксиомами I, II) следующими аксиомами.

1. *Каждой упорядоченной паре точек A, B сопоставлен некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$.*

2. *Для каждой точки A и вектора* **a** *существует, и притом единственная, точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ (т. е. от*

---

[1]) Изложение элементарной геометрии на основе этой аксиоматики дано в книге: Болтянский В. Г. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1986.

любой точки A можно отложить вектор, равный данному).

3. *Для любых точек A, B, C*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

4. *Существует хотя бы одна точка.*

Если здесь к аксиомам I, II векторного пространства присоединить аксиомы III, т. е. взять евклидово векторное пространство, то те же четыре аксиомы определяют евклидово пространство. Однако это пространство с фиксированной единицей длины, поскольку каждой паре точек A, B сопоставлен вектор и его длина есть некоторое определенное число. Пространство, определенное формулированными четырьмя аксиомами 1—4 через векторное пространство V, имеет то же число измерений, что V. И чтобы полностью определить n-мерное евклидово пространство E_n, нужно ввести аксиому, что V n-мерно.

Аксиома размерности. *Имеется n, и не более, линейно независимых векторов.*

Непротиворечивость. Аксиоматика векторного пространства, представленная аксиомами I, II, III непротиворечива, так как ей удовлетворяет множество, состоящее из одного вектора θ, когда аксиомы сводятся к тому, что I: $\theta+\theta=\theta$, II: $\lambda\theta=\theta$, III: $\theta\cdot\theta=0$.

Однако аксиомы векторного пространства удовлетворяются и вместе с аксиомой размерности, которая утверждает существование ненулевых векторов. Моделью служит множество наборов по n вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$; сумма и произведение на число указаны выше формулами (1), (2), скалярное произведение определяется формулой

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_1, \ldots, a_n)\cdot(b_1, \ldots, b_n)=a_1b_1+\ldots+a_nb_n.$$

То, что аксиомы III_1—III_4 скалярного произведения здесь выполнены, проверяется непосредственно.

Покажем, что аксиоматика евклидова пространства, представленная указанными выше четырьмя аксиомами, вместе с аксиомами векторного пространства тоже непротиворечива.

Пусть векторы представляются последовательностями по n чисел: $(x_1, \ldots, x_n)$ и операции с ними определяются, как только что указано. Вместе с этим пусть точки тоже представляются последовательностями по n чисел $[x_1, \ldots, x_n]$. При этом паре точек $A[a_1, \ldots, a_n]$,

$B[b_1, \ldots, b_n]$ сопоставляется вектор

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Проверим аксиомы.

1. Каждой упорядоченной паре точек A, B однозначно сопоставляется вектор $\overrightarrow{AB}$.

Это сделано предыдущим определением.

2. Для каждого вектора $\mathbf{c}$ и каждой точки A существует и притом единственная такая точка B, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$.

Это выполнено, так как если $(c_1, \ldots, c_n)$ — вектор $\mathbf{c}$ и $[a_1, \ldots, a_n]$ — точка A, то точка B будет $[a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n]$.

3. Для каждых точек A, B, C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ проверяется непосредственно: $(b_i - a_i) + (c_i - b_i) = c_i - a_i$.

Таким образом, векторная аксиоматика n-мерного евклидова пространства непротиворечива. Поэтому аксиомы аффинного пространства тоже непротиворечивы, так как представляют собой только «часть» аксиом евклидова пространства.

Конечно, нужно еще убедиться, что векторная аксиоматика равносильна той, которая была изложена выше, при условии, что задана единица длины; в частности, при $n = 2$ — это аксиоматика планиметрии, при $n = 3$ — стереометрии (§ 41—43). Этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

Замечание. Векторная аксиоматика была предложена немецким математиком Г. Вейлем около 1920 г. В последние 20 лет она распространилась у нас и стала, можно сказать, модной настолько, что была включена в виде дополнения в обязательный школьный учебник стереометрии[1]). Отношение этого дополнения к школьному курсу весьма отдаленное.

Название «векторное пространство» внушает мысль, будто этот предмет принадлежит геометрии в качестве одного из «пространств». Однако по-существу, а не по названию, векторное пространство представляет собою алгебраический объект — коммутативную группу с операцией умножения на число и еще с «умножением» элементов, если введено скалярное произведение. Чисто ал-

[1]) Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия 9—10.— изд. 1—7.— М.: Просвещение, 1983—84.

гебраический характер понятия векторного пространства выявляется еще больше, когда рассматривают векторное пространство, в котором допускается умножение на элементы какого-либо алгебраического поля K. Тогда говорят о «векторном пространстве над полем K». Внедрение векторной аксиоматики в изложение геометрии связано с общей тенденцией, направленной на то, чтобы по возможности поглотить геометрию алгеброй, подавить геометрические представления алгебраическими выкладками.

Достоинство векторной аксиоматики состоит в том, что она без всяких предварительных выводов открывает возможность развивать геометрию как аналитическую геометрию в векторной форме. Это не мудрено, так как аксиоматика эта предполагает очень много. Она не только использует понятие вещественного числа. Например, в свойствах скалярного произведения уже заключается, по существу, теорема Пифагора. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ направлены по катетам, то $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ — по гипотенузе, и так как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, то $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$.

§ 47. Исследование аксиом евклидова пространства

Непротиворечивость векторной аксиоматики доказана в предыдущем параграфе, и мы докажем непротиворечивость аксиоматики, введенной раньше (§ 41—44), реализовав ее в пространстве с векторной аксиоматикой. При этом реализуются аксиомы пространства с фиксированной единицей длины, но это в данном случае не существенно, и оговаривать это дальше мы не будем.

Итак, мы рассматриваем пространства, определенные векторной аксиоматикой. В каждом есть (по аксиоме 4) хотя бы одна точка A и базис векторов; число их — это число измерений пространства. Соответственно, прямую — одномерное пространство — можно определить как множество таких точек X, что

$$\overrightarrow{AX} = t\mathbf{a}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор базиса и t пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Отрезок AB можно определить как множество таких точек X, что

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB}t,$$

где $t \in [0, 1]$.

Длина отрезка AB определяется как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|$.

Если в определении прямой формулой (1) $|\mathbf{a}|=1$, то t — координата с единичным масштабом. Поэтому, очевидно, все линейные аксиомы на прямых выполняются.

Плоскость — двумерное пространство, задается точкой A и двумя независимыми векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ как множество таких точек X, что

$$\overrightarrow{AX}=\mathbf{a}t+\mathbf{b}s, \tag{2}$$

где опять-таки переменные t и s принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Аналогично трехмерное пространство заполняется такими точками X, что

$$\overrightarrow{AX}=\mathbf{a}t+\mathbf{b}s+\mathbf{c}r$$

с независимыми векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и тем же размахом изменения переменных t, s, r. Задание пространств высшей размерности очевидно.

Прямая, проходящая через две точки пространства, содержится в нем (будь пространство двумерным — плоскостью или другим). Действительно, прямая, проходящая через точки X_1, X_2, может быть представлена как множество точек X:

$$\overrightarrow{X_1X}=\overrightarrow{X_1X_2}t, \qquad t\in(-\infty,+\infty).$$

Поскольку $\overrightarrow{AX_2}=\overrightarrow{AX_1}+\overrightarrow{X_1X_2}$, то $\overrightarrow{X_1X_2}=\overrightarrow{AX_2}-\overrightarrow{AX_1}$ и потому $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AX_1}+\overrightarrow{X_1X}=\overrightarrow{AX_1}+(\overrightarrow{AX_2}-\overrightarrow{AX_1})\,t$.

Векторы, стоящие здесь справа выражаются через векторы базиса, например в случае плоскости, по формуле (2). Стало быть, вектор $\overrightarrow{AX}$ выражается через базис и тем самым точка X по определению принадлежит тому же пространству, в каком лежат точки X_1, X_2.

Обратимся к плоскости. Как только что доказано, через каждые две точки проходит прямая и вместе с нею — соединяющий их отрезок.

Образуем по векторам базиса $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторы

$$\mathbf{i}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad \mathbf{j}=\frac{\mathbf{b}\mathbf{a}^2-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})}{|\mathbf{b}\mathbf{a}^2-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})|}. \tag{3}$$

Они единичные и взаимно перпендикулярные, т. е.

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0,$$

что проверяется непосредственно из (3).

Из формул (3) можно выразить $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ (и, конечно, через $\mathbf{a}^2$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$). Подставив в (2), получим

$$\overrightarrow{AX} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$$

с переменными x, y. И так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ единичные и взаимно перпендикулярные, то x, y — это прямоугольные координаты точки X. По аксиоме сложения 3 для двух точек X_1, X_2 можно написать

$$\overrightarrow{AX_2} = \overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2},$$

откуда

$$\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{AX_2} - \overrightarrow{AX_1} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1).$$

И, пользуясь аксиомами скалярного умножения, получаем

$$|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда уже ясно, что на плоскости выполняется обычная планиметрия (см. § 32, где детально построена ее числовая реализация).

Теперь рассмотрим пространство большего числа измерений. В нем через каждые три точки проходит плоскость. Если эти точки лежат на одной прямой, то присоединим точку, не лежащую на этой прямой. Таким образом, мы всегда можем взять три точки не на одной прямой. Если это точки A, B, C, то векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ независимы и мы имеем плоскость, заданную уравнением

$$\overrightarrow{AX} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}s.$$

Она проходит через точки A, B, C, так как $X = A$ при $t = s = 0$, $X = B$ при $s = 0$, $t = 1$ (так как $\overrightarrow{AX} = \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$), и аналогично заключаем о точке C.

Итак, в пространстве через каждые три точки проходит плоскость — фигура, на которой, как доказано, выполняется планиметрия.

Вместе с тем пространство не сводится к плоскости и, значит, в нем есть точки, не лежащие в одной плоскости.

Таким образом, аксиомы стереометрии С0, С1 (или такие, как аксиомы Е0, Е1) выполняются.

Если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проходящая через эти точки, лежит в каждой из них, т. е. выполняется аксиома Е2. Но нужно рассмотреть особо трехмерное пространство и проверить выполнение аксиомы С2, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Пусть мы имеем две плоскости P_1, P_2 с общей точкой A и с базисами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Хотя бы один из векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ независим от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, так как иначе плоскости совпадали бы. Пусть именно $\mathbf{c}$ независим от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, так что три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ независимы. Поэтому если пространство трехмерно, то они образуют в нем базис и вектор $\mathbf{d}$ выражается через них:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}p + \mathbf{b}q + \mathbf{c}r.$$

Откуда

$$\mathbf{d} - \mathbf{c}r = \mathbf{a}p + \mathbf{b}q.$$

Обозначая этот вектор через $\mathbf{h}$, видим, что прямая $\overrightarrow{AX} = \mathbf{h}t$ лежит как в плоскости P_1, так и в P_2, поскольку $\mathbf{h}$ выражается и через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и через $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Итак, плоскости P_1, P_2 пересекаются по прямой. Аксиома С3 выполняется.

Остается аксиома С4 (или Е4), что два отрезка, равные третьему, равны. Но это выполняется само собой, поскольку равные отрезки — это те, которые имеют одну и ту же длину.

Таким образом, все аксиомы стереометрии выполняются, и тем их непротиворечивость доказана. Также доказана непротиворечивость аксиом пространств большего числа измерений.

Мы доказали также, что ранее сформулированные аксиомы пространственной геометрии выполняются в пространствах с векторной аксиоматикой. Для доказательства равносильности обеих аксиоматик следовало бы доказать обратное: что в пространстве с аксиомами стереометрии (или вообще евклидова пространства) выполняется векторная аксиоматика. Но этого мы делать здесь не будем. Доказательство, во всяком случае для стереометрии, заключается в построении векторного исчисления в стереометрии, которое можно найти в учебниках.

Полнота устанавливается тем, что в пространстве вводятся координаты и таким образом доказывается, что всякая реализация стереометрии изоморфна той, какую дают прямоугольные координаты. Аналогичный вывод для n-мерного пространства мы опускаем.

Независимость аксиом стереометрии C0—C4 проверяется просто.

1) В геометрии Лобачевского C0 не выполняется, а C1 — C4 выполняются.

2) Аксиома C2 не выполняется, если мы имеем одну плоскость, а остальные выполняются.

3) Представим себе пространство, в котором имеются только плоскости параллельные данной прямой. Аксиома C1 не будет выполняться, но C0, C2 — C4 выплняются.

4) Аксиомы C0, C1, C2, C4 выполняются в четырехмерном пространстве, а C3 — не выполняется.

5) Можно мыслить, что на одних плоскостях отрезки измеряются одной мерой, на других — другой. Тогда аксиома C4 о равенстве отрезков не выполняется, хотя остальные аксиомы будут выполнены.

ГЛАВА 8

ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

§ 48. Определение площади

Мы будем рассматривать только ограниченные фигуры, и слово «фигура» будет всегда обозначать плоскую ограниченную фигуру, т. е. такую, которая содержится в каком-нибудь круге.

Будем говорить, что фигура составлена из нескольких фигур, если она служит их объединением и никакие две

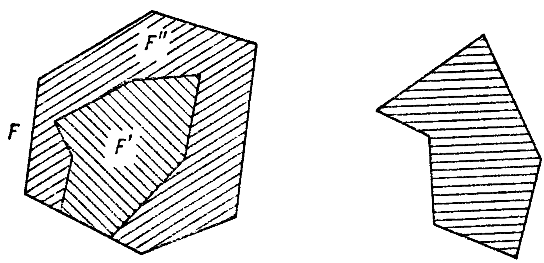

Рис. 128

из них не имеют общих внутренних точек. Многоугольной фигурой будем называть фигуру, ограниченную конечным числом отрезков[1]) (рис. 128). Определение площади уже было дано в § 31 о величине.

Площадью многоугольной фигуры называется величина, обладающая следующими двумя свойствами:

1) *равные фигуры имеют равные площади,*

2) *если фигура составлена из нескольких многоугольных фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.*

Первое свойство — инвариантность (неизменяемость) при перемещениях, второе — аддитивность; его достаточно требовать для того случая, когда фигура слагается из двух фигур.

---

[1]) Подразумевая, что граница фигуры содержится в ней и является границей ее внутренности.

Удобно ввести следующие обозначения.

Равенство фигур обозначим так: $F \cong F'$. То, что фигура F составлена из фигур F_1, F_2 и т. д. будем обозначать, как сумму: $F = F_1 + F_2$. Площадь будем обозначать буквой S.

Вместо самой площади как величины удобно рассматривать ее численное значение при данной единице измерения и дать следующее определение.

«Численной площадью» — численным значением площади фигуры при данной «единичной» фигуре E — называется число $S(F)$, относимое многоугольной фигуре, каждой — свое, так, что выполнены условия:

1. $S(F) > 0$.
2. Если $F \cong F'$, то $S(F) = S(F')$.
3. $S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2)$.
4. $S(E) = 1$.

Последнее условие означает, что единичная фигура — это та многоугольная фигура E, которой отнесено численное значение площади, равное единице. В качестве такой фигуры берут «единичный квадрат», т. е. квадрат со стороной, равной выбранной единице длины. Но это совершенно не обязательно: единичной фигурой может быть, в принципе, любая многоугольная фигура.

Заметим, что из аддитивности и положительности площади (свойства 1, 2) следует: *если фигура F содержит F' и не совпадает с F', то $S(F) > S(F')$.*

Действительно, если $F \supset F'$ и $F \neq F'$, то, очевидно, $F = F' + F''$, где F'' — тоже многоугольная фигура (рис. 128). По аддитивности $S(F) = S(F') + S(F'')$, и так как $S(F'') > 0$, то $S(F) > S(F')$.

Дальше мы будем говорить о площади, допуская, что под «площадью» можно разуметь как саму величину, так и ее численное значение при какой-нибудь единице измерения, которую можно для дальнейшего выбрать раз навсегда. В большинстве случаев удобнее иметь в виду именно численное значение, когда говорится о сложении и сравнении площадей (но не об их измерении: измеряется величина, а ее численное значение — это результат измерения).

То, что у каждой многоугольной фигуры, в частности у квадрата, есть определенная площадь, представляется, в общем, как нечто само собой разумеющееся. Но можно задать следующий вопрос, Представим себе, что, разбив квадрат, или другой многоугольник на какие-то многоугольники, мы перемещаем их так, чтобы они не налегли друг на друга. Мы будем получать различные новые фигуры. Не может ли при этом получиться такая фигура, которая уместится внутри первоначального многоугольника или внутри одной из полученных из него новых фигур? Если бы это случилось, то мы имели бы две фигуры, у которых, с одной стороны, площади должны быть равны, так как они составлены из попарно равных фигур. С другой стороны, у фигуры, умещающейся внутри другой, площадь меньше. То есть получалось бы противоречие. Выходило бы, что понятие о равенстве или неравенстве площадей и, стало быть, само понятие о площади оказались лишенными смысла.

Мы скажем: «не может быть, чтобы одна фигура уместилась внутри другой, ведь у них площадь одна и та же». Но именно об этом и ставится вопрос: имеет ли смысл понятие площади? Иначе говоря, существует ли, в самом деле, такая величина, как площадь у многоугольных фигур?

Можно поставить и другой вопрос. Площадь прямоугольника определяют, покрывая его квадратами (рис. 129) и квадраты эти берутся такими, что стороны

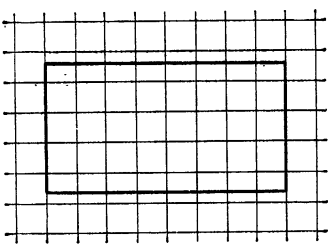

Рис. 129

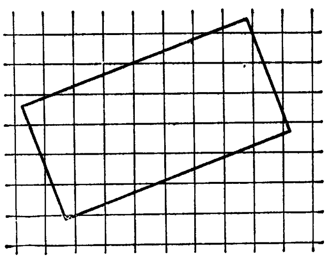

Рис. 130

их параллельны сторонам прямоугольника. А что будет, если брать другие квадраты, повернутые относительно прямоугольника? Будет ли подсчет таких квадратов давать то же самое (в пределе, когда квадраты уменьшаются)? Иначе говоря, будет ли число маленьких повернутых квадратов, укладывающихся на прямоугольнике, тем же самым с точностью до квадратов, которые пересекаются со сторонами прямоугольника (рис. 130)?

Мы уверены, что результат будет тот же, потому что у фигуры есть определенная площадь, так что ее измерение должно давать всегда один и тот же результат. Но именно об этом и идет речь: существует ли у фигуры определенная площадь, независимая от того, как мы ее измеряем? [1])

Приведенные рассуждения показывают, что существование площади, т. е. существование величины со свойствами 1, 2, вовсе не так очевидно, как кажется на первый взгляд. Существование ее нужно доказать.

Доказательство может быть дано; именно: доказывается следующая теорема.

Теорема I. *Каждая многоугольная фигура имеет определенную площадь.*

Для численных значений это можно выразить так: *при заданной единичной фигуре E каждой многоугольной фигуре отвечает, и притом единственная, численная площадь со свойствами 1—4. Если фигура E заменяется другой E', то все численные площади изменяются на один и тот же множитель*:

$$S'(F) = kS(F), \qquad k = S'(E) = \frac{1}{S(E')}.$$

Ту же теорему можно высказать иначе.

Существует, и притом единственная, функция со свойствами 1—4, определенная на множестве многоугольных фигур. Функции, соответствующие разным «единичным» фигурам E, отличаются множителем.

Вслед за определением площади многоугольных фигур встает вопрос об определении площади для других фигур. Ее определяют, обобщая тот способ, каким в школьном курсе находят площадь круга.

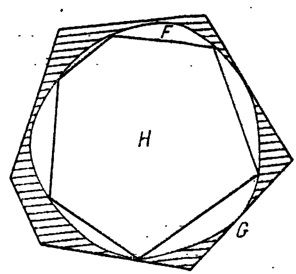

Рис. 131

Пусть F — какая угодно данная фигура. Будем рассматривать многоугольные фигуры, содержащие F и содержащиеся в F, первые обозначим G и их площади $S(G)$; вторые обозначим H и их площади $S(H)$ (рис. 131).

[1]) На этот вопрос обратил внимание итальянский математик Де-Цольт (в 1881 г.) и пытался решить его, но только потом это было строго сделано профессором университета в Одессе С. О. Шатуновским, Д. Гильбертом и др.

(Если многоугольных фигур, содержащихся в данной фигуре нет, то считаем $S(H)=0$.)

Если многоугольная фигура G содержит F, а $F\supset H$, то, очевидно, $G\supset H$ и, значит, $S(G)\geqslant S(H)$ (при этом $S(G)=S(H)$ возможно только в том случае, когда обе фигуры G и H совпадают и, значит, совпадают с F, так что сама фигура F — многоугольная).

В качестве площади фигуры F можно взять такую величину $S(F)$, что для всех фигур G и H

$$S(G)\geqslant S(F)\geqslant S(H).$$

То есть за площадь фигуры F принимается величина, которая не больше площадей многоугольных фигур, содержащих F, и не меньше площадей многоугольных фигур, содержащихся в F.

Однако площади фигур G и H могут отличаться так, что между ними будет целый интервал величин и, стало быть, величина $S(F)$ не будет единственной. Площадь оказывается неопределенной. Она будет определенной, если разность площадей $S(G)$, $S(H)$ может быть сколь угодно малой.

Таким образом, мы приходим к окончательному определению, которое, как легко видеть, воспроизводит в общем виде школьное определение площади круга.

Площадью фигуры F называется величина, которая не больше площадей многоугольных фигур, содержащих F, и не меньше площадей многоугольных фигур, содержащихся в F, при условии, что разности этих площадей могут быть сколь угодно малыми. Мы говорим тогда, что фигура F имеет определенную площадь.

Каждая многоугольная фигура F подпадает под это определение, поскольку сама F оказывается многоугольной фигурой, содержащей F и содержащейся в F.

Оказывается, что так определенная площадь и для не многоугольных фигур обладает теми же свойствами, какие определяют площадь многоугольных фигур, т. е. выполняется

Теорема II. *Определенная только что площадь обладает свойствами инвариантности и аддитивности:*

(1) *Если фигура F имеет определенную площадь $S(F)$, то каждая равная ей фигура F', тоже имеет определенную площадь, и притом равную $S(F)$.*

(2) *Если фигура F составлена из фигур F_1, F_2 с определенными площадями $S(F_1)$, $S(F_2)$, то она тоже имеет определенную площадь $S(F)$ и $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$.*

Выразим условие, при котором фигура имеет определенную площадь, несколько иначе.

Если многоугольная фигура H содержится в фигуре F, то многоугольная фигура G, содержащая F, получается прибавлением к H некоторой многоугольной фигуры K — «разности» $G-H$. Эта фигура, очевидно, содержит границу фигуры F (рис. 132). Ее площадь равна разности «площадей» фигур G и H:

$$S(K)=S(G)-S(H).$$

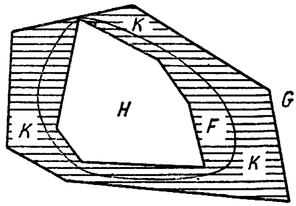

Рис. 132

Стало быть, то, что площади фигур G и H могут быть сколь угодно близки и тем самым фигура F имеет определенную площадь, равносильно тому, что площадь фигуры $G-H$ может быть сколь угодно малой. То есть граница данной фигуры F может быть заключена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Это, стало быть, равносильно условию существования у фигуры определенной площади. И можно сформулировать: *фигура имеет определенную площадь тогда и только тогда, когда ее границу можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.* Но если фигура может быть заключена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади, то ее площадь равна нулю (как, например, равна нулю площадь отрезка). Это позволяет выразить полученное условие существования у фигуры определенной площади так.

Теорема. *Фигура имеет определенную площадь тогда и только тогда, когда площадь ее границы равна нулю.*

И можно пересказать теорему II.

Теорема IIа. *Площадь фигур с определенной площадью обладает теми же свойствами* 1—4, *как, в частности, площадь многоугольных фигур.*

К определению площади можно подойти, исходя из способа ее измерения с помощью квадратных сеток. Это обобщает тот прием, каким находят площадь прямоугольника или измеряют площадь практически с помощью палетки. Коротко можно сказать: *площадь фигуры можно определить как величину, измеряемую числом квадратных* *единиц, содержащихся в фигуре, и покрывающих фигуру, если у этих чисел есть общий предел.*

Это определение одинаково для многоугольных и других фигур и равносильно данным выше. На его основе и будут дальше доказаны теоремы I, II.

План дальнейшего изложения. Доказательства теоремы I и теоремы II трудны. Они будут осуществлены в несколько этапов:

1) В § 49 излагается определение площади путем измерения квадратными единицами. После этого остается задача: доказать, что определяемая таким путем величина действительно обладает характерными свойствами площади — аддитивностью и инвариантностью (положительность уже заключается в определении измерением). Пока это не доказано, мы будем называть ее «площадью» (в кавычках).

2) В § 50 доказывается аддитивность «площади».

3) В § 51 доказывается, что каждая многоугольная фигура имеет определенную «площадь», и устанавливается общее условие того, что у фигуры есть определенная «площадь»,— «площадь» границы равна нулю.

4) В § 52 доказывается инвариантность «площади» многоугольных фигур.

Вместе с предыдущими результатами это показывает, что для многоугольных фигур «площадь» оказывается площадью (без кавычек) со свойствами инвариантности и аддитивности. Этим оказывается доказанной главная часть теоремы I — о существовании площади. Но остается еще доказать ее единственность и правило перехода к другой единице измерения.

5) В § 53 и дается доказательство этих двух моментов — единственности и правила перехода к другой единице измерения. Этим доказательство теоремы I полностью завершается.

6) В § 54 — о площади немногоугольных фигур — доказываются теоремы II и IIa.

7) В § 55 устанавливается связь понятий площади и интеграла.

8) Наконец, § 56 посвящен уже не площади, а понятию объема.

Изложение завершается кратким сопоставлением теорий площади и объема.

З а м е ч а н и е 1. То условие, что фигура имеет определенную площадь, если площадь ее границы равна нулю, мало наглядно и, что более существенно, само использует понятие площади. Однако заменить его другим не удается и можно указать только те или иные более частные условия, когда оно выполняется. Следующее условие будет все же достаточно общим.

Назовем обобщенным отрезком такую фигуру — кривую, которая в подходящих координатах представляется уравнением $y = f(x)$ с непрерывной функцией f, заданной на каком-либо замкнутом промежутке.

В § 55 будет доказана

Теорема III. *Каждая фигура, ограниченная конечным числом обобщенных отрезков, имеет определенную площадь; для таких фигур выполняется все то, что было сказано о площади многоугольных фигур.*

Замечание 2. Приведем пример фигуры без определенной площади. Представим себе прямоугольник, составленный из двух квадратов P, Q с общей стороной. Пусть на одной стороне квадрата P введена координата x. Представим себе также фигуру R, состоящую из всех лежащих в этом квадрате отрезков, параллельных другой его стороне и имеющих концы в точках с рациональными значениями координаты x. Эти отрезки плотно покрывают весь квадрат. Фигура F, составленная из квадрата Q и фигуры R, содержится в прямоугольнике $P + Q$, содержит квадрат Q, но большей многоугольной фигуры не содержит. Эта фигура F не имеет определенной площади.

В этом примере фигура F имеет часть R довольно необычного «патологического» строения. Но можно привести примеры областей, которые не имеют определенной площади. Эти примеры строятся не так просто, и мы их здесь приводить не будем. Полезно, однако, знать, что даже не всякая область имеет определенную площадь в смысле принятого выше определения.

Это можно понять практически. Представим себе земельный участок, ограниченный с одной стороны оврагом с сильно изрезанным краем. Для владельца участка зигзаги края неудобны, и площадь участка он будет измерять без них. Но землеустроитель может настаивать на том, чтобы учитывать и площадь «зигзагов». Таким образом, практически оказывается, что площадь можно оценивать по-разному. Математическая идеализация и приводит к областям, не имеющим определенной площади из-за особенностей границы.

Замечание 3. Подобно тому как для многоугольных фигур площадь есть функция со свойствами 1—4, так можно сказать, что вообще площадь других фигур — это функция с теми же свойствами. Однако для того, чтобы функция была определена, нужно указать область ее задания, в нашем случае — множество тех фигур, для которых она определена. В этом и состоит трудность общего определения площади. Функцию со свойствами 1—4 можно определить не только на множестве наших «фигур с определенной площадью», но и на гораздо более обширных множествах. Однако это имеет мало смысла. Для фигур очень общего вида пользуются другим понятием — «мерой», которая совпадает с площадью, когда она определена, но характеризуется другими свойствами, о чем мы здесь говорить не будем.

§ 49. Определение «площади» измерением

Представим себе, что плоскость разбита прямыми на единичные квадраты подобно клетчатой бумаге. Эти квадраты в свою очередь разбиты на меньшие равные квадраты, те — на еще меньшие, и т. д. Так мы представляем себе последовательность все более измельчающихся квадратных сеток, покрывающих плоскость. Эти сетки мы перенумеруем: первая, состоящая из единичных квадратов, вторая, третья и т. д.

Единичному квадрату и, соответственно, всем квадратам первой сетки припишем «площадь», равную единице:

$$S(E_1) = 1.$$

Если в n-й сетке единичный квадрат разделен на N_n квадратов, то каждому квадрату n-й сетки приписываем площадь

$$S(E_n) = \frac{1}{N_n}.$$

Фигуре, составленной из квадратов сетки, приписывается «площадь», равная сумме их «площадей». (Мы говорим здесь «площадь» для краткости, хотя имеем в виду численную площадь и, строго говоря, пока речь идет о числах, приписываемых фигурам в качестве их численной площади.)

Пусть теперь F — какая-либо фигура. Сопоставим ей две фигуры из квадратов n-й сетки: F_n^i, F_n^e (i, e — первые буквы слов interior — внутренний, exterior — внешний). Фигура F_n^i состоит из всех квадратов n-й сетки, внутренности которых содержатся в F (рис. 133). Фигура F_n^e состоит из всех квадратов n-й сетки, внутри которых есть точки из F. «Площади» этих фигур обозначаем $S(F_n^i)$, $S(F_n^e)$. Очевидно, каждый квадрат из F_n^i входит в F_n^e и поэтому

$$F_n^i \subset F_n^e, \quad S(F_n^i) \leqslant S(F_n^e). \qquad (1)$$

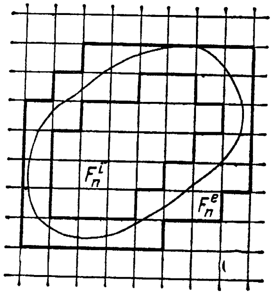

Рис. 133

Перейдем к $(n+1)$-й сетке. Каждый квадрат n-й сетки, входящий в фигуру F_n^i, разобьется на квадраты $(n+1)$-й сетки. Внутренности их будут также содержаться в фигуре F, и, стало быть, все они будут входить в фигуру F_{n+1}^i. Поэтому $F_{n+1}^i \supset F_n^i$ (к квадратам из F_n^i могут прибавиться квадраты, содержащиеся в квадратах из F_n^e). Соответственно,

$$S(F_{n+1}^i) \geqslant S(F_n^i). \qquad (2)$$

Квадраты, входящие в фигуру F_{n+1}^e, т. е. содержащие внутри точки из F, будут, очевидно, содержаться в квадратах, составляющих фигуру F_n^e. Поэтому $F_{n+1}^e \subset F_n^e$ и, соответственно,

$$S(F_{n+1}^e) \leqslant S(F_n^e). \qquad (3)$$

Таким образом, переходя от первой сетки ко второй и т. д., мы получаем две последовательности чисел $S(F_n^i)$ и $S(F_n^e)$. При этом ввиду (2)

$$S(F_1^i) \leqslant S(F_2^i) \leqslant S(F_3^i) \leqslant \ldots$$

Эта последовательность ограничена (так как все квадраты фигур F_n^i содержатся в единичных квадратах, покрывающих фигуру F).

Таким образом, последовательность чисел $S(F_n^i)$ неубывающая и ограниченная. Поэтому она имеет предел;

обозначим его $S_i(F)$, т. е. положим

$$S_i(F) = \lim_{n\to\infty} S(F_n^i). \tag{4}$$

Это число $S_i(F)$ мы назовем *внутренней площадью* фигуры F.

Рассмотрим теперь последовательность чисел $S(F_n^e)$. Из (3) следует, что

$$S(F_1^e) \geqslant S(F_2^e) \geqslant S(F_3^e) \geqslant \ldots$$

Таким образом, числа $S(F_n^e)$ образуют невозрастающую последовательность, и притом ограниченную, так как все эти числа $\geqslant 0$. Поэтому последовательность имеет предел; обозначим его $S_e(F)$, т. е. положим

$$S_e(F) = \lim_{n\to\infty} S(F_n^e). \tag{5}$$

Это число $S_e(F)$ назовем внешней площадью фигуры F.

Внешняя площадь всякой фигуры не меньше внутренней:

$$S_e(F) \geqslant S_i(F). \tag{6}$$

Действительно, согласно (1) при всяком n $S(F_n^e) \geqslant S(F_n^i)$. Поэтому такое же неравенство будет между пределами этих чисел, т. е. выполняется (6).

Если внешняя и внутренняя площади фигуры равны, т. е. $S_e(F) = S_i(F)$, то их общее значение принимается за «площадь» фигуры F и мы говорим: фигура F имеет определенную «площадь» $S(F)$,

$$S(F) = S_e(F) = S_i(F). \tag{7}$$

Таким образом, можно дать определение.

«Площадью» (численной площадью) фигуры называется общее значение ее внешней и внутренней площади, когда они равны.

Вначале фигурам, составленным из квадратов какой-либо сетки, была приписана «площадь» — сумма «площадей» этих квадратов. Нужно убедиться, что это согласуется с данным общим определением площади.

Пусть фигура F состоит из квадратов m-й сетки; тем самым $F = F_m^i = F_m^e$ и при всех $n > m$ также $F = F_n^i = F_n^e$. Поэтому при всех $n > m$ «площадь», первоначально приписанная фигуре F, будет

$$S(F) = S(F_n^i) = S(F_n^e).$$

В пределе при $n \to \infty$ получим

$$S(F) = S_i(F) = S_e(F),$$

т. е. $S(F)$ является общим значением внутренней и внешней площади. Тем самым $S(F)$ является «площадью» фигуры F в смысле данного общего определения.

Итак, мы сопоставили некоторым фигурам числа $S(F)$ по формуле (7) и назвали их «площадью». Но нужно еще доказать, что эти числа действительно обладают свойствами, характеризующими площадь, и выяснить, для каких фигур эти числа определены. Короче, нужно доказать, что они — те, о которых говорится в теоремах I, II. Это мы дальше и докажем. Попутно мы установим также основные свойства внутренней и внешней площади.

§ 50. Аддитивность «площади»

Здесь мы докажем теорему об аддитивности «площадей».

Теорема 1. *Если фигуры F_1, F_2 имеют определенную «площадь» и не имеют общих внутренних точек, то фигура $F_1 + F_2$ тоже имеет определенную «площадь» и*

$$S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2). \tag{1}$$

Эта теорема будет получена как следствие теоремы о «полуаддитивности» внешней и внутренней площади.

Теорема 2. *Для любых двух фигур F_1, F_2 без общих внутренних точек*

$$\begin{aligned} S_e(F_1 + F_2) &\leqslant S_e(F_1) + S_e(F_2), \\ S_i(F_1 + F_2) &\geqslant S_i(F_1) + S_i(F_2) \end{aligned} \tag{2}$$

(такие же соотношения, как (1), (2), выполняются для любого числа слагаемых $F_1, F_2, \ldots$, что выводится из (1), (2) обычным путем).

Доказательство теоремы 2. Для внешней площади выполняется общее утверждение.

Лемма 1. *Для любых фигур F_1, F_2 и их объединения $F_1 \cup F_2$*

$$S_e(F_1 \cup F_2) \leqslant S_e(F_1) + S_e(F_2).$$

Доказательство. Пусть $F=F_1\cup F_2$. Если квадрат n-й сетки входит в F_n^e, то это значит, по условию, что он содержит внутри себя точки из F. Тем самым он содержит внутри точки хотя бы одной из фигур F_1, F_2, скажем, фигуры F_1. Это значит, что он входит в фигуру F_{1n}^e.

Итак, всякий квадрат фигуры F_n^e принадлежит хотя бы одной из фигур F_{1n}^e, F_{2n}^e. «Площади» же всех этих фигур слагаются из «площадей» составляющих их квадратов. Тем самым

$$S(F_n^e)\leqslant S(F_{1n}^e)+S(F_{2n}^e).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$S_e(F)\leqslant S_e(F_1)+S_e(F_2).$$

Лемма 2. *Если фигуры F_1, F_2 не имеют общих внутренних точек, то*

$$S_i(F_1+F_2)\geqslant S_i(F_1)+S_i(F_2).$$

Доказательство. Пусть фигура F составлена из F_1 и F_2: $F=F_1+F_2$.

Пусть какой-то квадрат Q n-й сетки содержится в фигуре F_{1n}^i, т. е. внутренность его содержится в F_1. Тем самым, она содержится в F и, значит, Q принадлежит фигуре F_n^i. Вместе с тем внутренность этого квадрата не содержится внутри F_2, так как F_2 не имеет с F_1 общих внутренних точек. Тем самым квадрат Q не принадлежит фигуре F_{2n}^i. Аналогично, если квадрат содержится в F_{2n}, то он не принадлежит F_{1n}. Таким образом, мы видим, что фигуры F_{1n}^i, F_{2n}^i не имеют общих квадратов и все их квадраты входят в фигуру F_n. Тем самым для сумм их «площадей» получается, что

$$S(F_{1n}^i)+S(F_{2n}^i)\leqslant S(F_n^i).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$S_i(F_1)+S_i(F_2)\leqslant S_i(F)=S_i(F_1+F_2).$$

Таким образом, лемма 2 доказана. Вместе с леммой 1 они дают теорему 2.

Доказательство теоремы 1. Теорему 1 можно сформулировать так:

Если фигура F составлена из фигур F_1, F_2 с определенной «площадью», то она тоже имеет определенную «площадь» и

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2).$$

Доказательство. Пусть фигура F составлена из фигур F_1, F_2 с определенной «площадью», т. е. $S_e(F_1) = S_i(F_1) = S(F_1)$, и то же для F_2. Тогда из лемм 1, 2

$$S_e(F) \leqslant S(F_1) + S(F_2), \quad S_i(F) \geqslant S(F_1) + S(F_2).$$

А так как заведомо $S_i(F) \leqslant S_e(F)$, то получается, во-первых, что

$$S_e(F) = S_i(F),$$

т. е. фигура F имеет определенную «площадь» $S = S_i = S_e$, и, во-вторых,

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2).$$

Теорема доказана.

Монотонность «площади».

Теорема 3. *Если $F \supset F'$, то*

$$S_i(F) \geqslant S_i(F'), \quad S_e(F) \geqslant S_e(F').$$

Поэтому если фигуры F, F' имеют определенные «площади» $(S = S_e = S_i)$, *то*

$$S(F) \geqslant S(F').$$

Доказательство. Пусть $F \supset F'$. Тогда в n-й сетке каждый квадрат, содержащий внутри точки из F', тем самым содержит внутри точки из F. Следовательно, $F_n'^e \subset F_n^e$ и

$$S(F_n'^e) \leqslant S(F_n^e).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$S_e(F') \leqslant S_e(F).$$

Вывод для S_i аналогичен. Каждый открытый квадрат, содержащийся в F', содержится и в F. Поэтому $F_n'^i \subset F_n^i$, так что $S(F_n'^i) \leqslant S(F_n^i)$ и в пределе $S_i(F') \leqslant S(F)$, что и требовалось доказать.

§ 51. Фигуры с определенной «площадью»

Теорема 1. *Каждая многоугольная фигура имеет определенную «площадь».*

Эта теорема получится как следствие общей теоремы.

Теорема 2. *Фигура имеет определенную «площадь» тогда и только тогда, когда внешняя «площадь» ее границы равна нулю.*

Так как всегда $S_e \geqslant S_i \geqslant 0$, то из $S_e(F) = 0$ следует $S_i(F) = 0$, т. е. $S_e(F) = S_i(F)$, и, значит, фигура F имеет определенную «площадь», равную нулю. Поэтому теорему 2 можно формулировать и так.

Теорема 2a. *Фигура имеет определенную «площадь» тогда и только тогда, когда «плщадь» ее границы равна нулю.*

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 вытекает из следующего изящного утверждения.

Лемма 1. *Для каждой фигуры F*

$$S_e(F) - S_i(F) = S_e(\partial F),$$

где ∂F — граница F.

Доказательство. Пусть F — данная фигура и ∂F — ее граница. Рассмотрим в данной n-й сетке фигуры F_n^e, F_n^i, ∂F_n^e. Покажем, что фигура ∂F_n^e состоит из тех квадратов фигуры F_n^e, которые не входят в F_n^i.

В самом деле, если квадрат Q входит в F_n^e, но не в F_n^i, то это значит, что внутри него есть точки из F, но также точки, не принадлежащие F (иначе он содержался бы в F_n^i). Следовательно, внутри этого квадрата есть точки границы F. Тем самым такой квадрат входит в ∂F_n^e.

Пусть теперь Q — квадрат, входящий в ∂F_n^e. Он содержит внутри точки из ∂F, т. е. точки границы фигуры F. Тем самым он содержит внутри как точки, принадлежащие F, так и не принадлежащие F. А это значит, что он входит в фигуру F_n^e, но не в F_n^i.

Таким образом, фигура ∂F_n^e образуется всеми квадратами, которые входят в F_n^e, но не в F_n^i. Поэтому для «площадей» выполняется равенство:

$$S(F_n^e) - S(F_n^i) = S(\partial F_n^e).$$

Переходя к пределу, получаем

$$S_e(F) - S_i(F) = S_e(\partial F),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы сразу следует теорема 2. То, что фигура F имеет определенную «площадь», означает по определению, что $S_e(F) = S_i(F)$. А из доказанной леммы следует, что это равносильно $S_e(\partial F) = 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 о том, что многоугольная фигура имеет определенную «площадь», выводится из доказанной теоремы 2. Для этого докажем такую лемму.

Лемма 2. *Если a — длина стороны квадрата данной сетки, то отрезок длины l проходит внутри не более чем $2\frac{l}{a} + 4$ квадратов.*

Доказательство. Пусть дана квадратная сетка с длиной стороны квадрата, равной a. Сетка образована прямыми двух взаимно перпендикулярных направлений. Любой данный отрезок образует с ними углы, в сумме равные 90°, и, стало быть, с прямыми одного из этих направлений — угол, не больший 45°. Такие прямые назовем горизонтальными, другие — вертикальными (рис. 134).

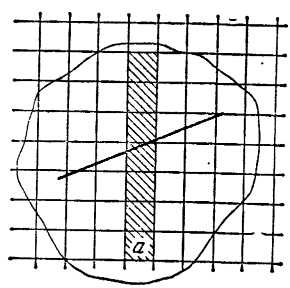

Рис. 134

Вертикальные прямые делят плоскость на полосы ширины a. Отрезок L, пересекая такую полосу, может пересекать, самое большее, два квадрата, иначе его угол с горизонтальной прямой был бы больше 45°.

Если длина отрезка равна l, то он пересекает никак не больше $\frac{l}{a}$ полос. Вместе с ними он пересекает самое большее $2\frac{l}{a}$ квадратов.

У каждого из концов он может пересекать по одной полосе и, значит, еще по 2 квадрата. Так что в целом, он пересекает не более чем $2\frac{l}{a} + 4$ квадрата, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *«Площадь» отрезка равна нулю.*

Доказательство. Пусть фигура F представляет собою отрезок длины l. Пусть a_n — длина стороны квадрата n-й сетки. Тогда по доказанной лемме отрезок проходит внутри не более чем $2\frac{l}{a_n}+4$ квадратов сетки, и, значит, фигура F_n^e состоит не более чем из такого числа квадратов, и так как «площадь» квадрата равна a_n^2, то «площадь» фигуры F_n^e оценивается так:

$$S(F_n^e)\leqslant\left(2\frac{l}{a_n}+4\right)a_n^2=2la_n+4a_n^2.$$

Когда $n\to\infty$, то $a_n\to 0$, а $S(F_n^e)\to S_e(F)$. Следовательно, $S_e(F)=0$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *«Площадь» объединения конечного числа фигур нулевой «площади» равна нулю.*

Доказательство. Если фигура F служит объединением фигур $F_1, F_2, \ldots, F_m$, то по лемме 1 § 50

$$S_e(F)\leqslant S_e(F_1)+S_e(F_2)+\ldots+S_e(F_m).$$

Поэтому если все фигуры $F_1, \ldots, F_m$ нулевой «площади», то и $S_e(F)=0$.

Доказательство теоремы 1 получается теперь сразу. Граница многоугольной фигуры состоит из конечного числа отрезков, а потому, как следует из лемм 3, 4, «площадь» ее равна нулю. Следовательно, согласно теореме 2 многоугольная фигура имеет определенную «площадь».

§ 52. Площади равных многоугольных фигур

Теорема 1. *У равных многоугольных фигур «площади» равны.*

Доказательство проходит в три этапа.

Равенство «площадей» параллельно перенесенных фигур.

Лемма 1. *«Площадь» прямоугольника со сторонами, параллельными прямым квадратной сетки, равна произведению длин его сторон.*

Доказательство получаем обычным путем, как в школьном курсе, беря квадраты, содержащиеся в данном прямоугольнике F и покрывающие его, т. е. беря фигуры F_n^i и F_n^e. (Правда, в школьном курсе квадраты «накладывают» от двух сторон прямоугольника, тут же они, вообще говоря, располагаются иначе. Но это, очевидно, не существенно.)

Лемма 2. *Фигуры, составленные из равных прямоугольников со сторонами, параллельными прямым сетки, имеют равные «площади».*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что равные прямоугольники, о которых тут говорится, имеют равные «площади». Следовательно, по аддитивности «площади» и фигуры, составленные из них, имеют равные «площади», что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Для многоугольных фигур F всегда $F_n^i \subset \subset F \subset F_n^e$.*

Доказательство. Если внутренность какого-либо квадрата Q содержится в многоугольной фигуре F, то, очевидно, и весь квадрат Q содержится в F. Фигура F_n^i состоит из квадратов, внутренности которых содержатся в F. Поэтому для многоугольной фигуры $F_n^i \subset F$.

Фигура F_n^e состоит из квадратов, содержащих внутри точки из F. Поэтому F_n^e содержит всю внутренность F, а вместе с нею — и границу внутренности. Тем самым, если фигура F многоугольная, то $F_n^e \supset F$. Лемма доказана.

Замечание. Совершенно также доказывается общее утверждение: Если фигура F состоит из внутренности и ее границы, то $F_n^i \subset F \subset F_n^e$. Но если фигура имеет другое строение, то эти включения могут не выполняться. Простейший пример: если F — внутренность квадрата Q n-й сетки с добавленной стороной другого квадрата, то $F_n^i = F_n^e = Q$, но $Q \not\subset F$ и $F \not\subset Q$.

Лемма 4. *Если одна многоугольная фигура получается из другой параллельным переносом, то их «площади» равны.*

Доказательство. Пусть F, F' — многоугольные фигуры, из которых одна получается из другой переносом, так что $F' = tF$, где t — параллельный перенос. Возьмем в n-й сетке фигуры F_n^i, F_n^e. По лемме 3 $F_n^i \subset F \subset F_n^e$. Поэтому также $tF_n^i \subset tF \subset tF_n^e$. Отсюда по монотонности «площади»

$$S\left(tF_n^i\right) \leqslant S(tF) \leqslant S\left(tF_n^e\right).$$

Фигуры F_n^i, F_n^e состоят из прямоугольников со сторонами на прямых сетки, поэтому согласно лемме 2

$$S\left(tF_n^i\right)=S\left(F_n^i\right), \quad S\left(tF_n^e\right)=S\left(F_n^e\right).$$

Благодаря этому предыдущие неравенства можно переписать так:

$$S\left(F_n^i\right)\leqslant S(tF)\leqslant S\left(F_n^e\right).$$

При $n\to\infty$ здесь крайние члены сходятся к $S(F)$ и, стало быть,

$$S(tF)=S(F),$$

что и требовалось доказать.

Квадраты каждой из наших сеток имеют одну и ту же определенную «площадь» и получаются друг из друга параллельными переносами. Если подвергнуть их какому-либо перемещению, то получатся опять сетки из равных и параллельно расположенных квадратов. Поэтому из леммы 4 вытекает

Следствие. *Квадратные сетки, получаемые из данных путем какого угодно перемещения, состоят каждая из квадратов одной и той же «площади». «Площадь» каждого квадрата составляет поэтому такую же долю основного квадрата, как в данных сетках.* (Но пока еще не известно, равны ли их «площади» «площадям» квадратов исходной сетки. Это надо доказать.)

Равенство «площадей» многоугольных фигур, получаемых отражением.

Лемма 5. *Если фигура F' получается из многоугольной фигуры F отражением в прямой, то она имеет ту же самую «площадь».*

Доказательство. Пусть F — данная многоугольная фигура. Произведем отражение в прямой; обозначая его r, имеем фигуру $F'=rF$. Вместе с фигурой F подвергнем тому же отражению все наши квадратные сетки. Получим, как указано в следствии леммы 4, такие же сетки, только не известно, будет ли основной квадрат единичным. Если его «площадь» равна k, то все квадраты отраженных сеток будут тоже отличаться в k раз от «площади» соответствующих квадратов исходных сеток.

Фигуры F_n^i, F_n^e перейдут при этом в фигуры rF_n^i, rF_n^e, построенные по n-й отраженной сетке так же, как F_n^i, F_n^e построены по исходной сетке. Поэтому отношения их «площадей» к «площадям» основных квадратов будут одни и те же, так что

$$S(rF_n^i) = kS(F_n^i), \quad S(rF_n^e) = kS(F_n^e).$$

Так как по лемме 3 $F_n^i \subset F \subset F_n^e$, то точно так же $rF_n^i \subset rF \subset rF_n^e$. Поэтому для «площадей» получаем

$$S(rF_n^i) \leqslant S(rF) \leqslant S(rF_n^e),$$

или, принимая во внимание предыдущие равенства,

$$kS(F_n^i) \leqslant S(rF) \leqslant kS(F_n^e).$$

При переходе к пределу при $n \to \infty$ «площади» $S(F_n^i)$, $S(F_n^e)$ сходятся к $S(F)$, и потому получаем

$$kS(F) \leqslant S(rF) \leqslant kS(F).$$

Следовательно,

$$S(rF) = kS(F). \tag{1}$$

Весь этот вывод применяется к любой многоугольной фигуре и, значит, к rF. Поэтому, подставляя в последнее равенство rF вместо F, получим $S(rrF) = kS(rF) = k^2S(F)$. Но повторное отражение дает тождественное преобразование, так что $rrF = F$. Поэтому $k^2 = 1$ и из (1) получаем, что

$$S(rF) = S(F),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 о равенстве «площадей» равных многоугольных фигур непосредственно следует из доказанной леммы 5.

Фигура, равная данной, получается из нее некоторым перемещением, а всякое перемещение может быть получено как результат нескольких (не более 3-х) последовательных отражений. При каждом отражении многоугольная фигура согласно лемме 5 переходит в многоугольную фигуру с той же «площадью». Поэтому то же будет и при нескольких отражениях. Тем самым фигура, равная данной, имеет ту же «площадь», что и требовалось доказать.

Мы определили «площадь», исходя из некоторой данной сетки единичных квадратов. Но из теоремы 1, очевидно, следует, что та же «площадь» получится, если исходить из какой угодно другой, повернутой сетки единичных квадратов.

§ 53. Окончание доказательства теоремы I § 48

В § 48 была высказана теорема I. *Пусть выбран некоторый квадрат E. Тогда каждой многоугольной фигуре F может быть отнесена, и притом единственная, численная площадь, т. е. такое число $S(F)$, что будут выполнены следующие четыре условия.*

1. $S(F)>0$.
2. *Если* $F\cong F'$, *то* $S(F)=S(F')$ (инвариантность).
3. $S(F_1+F_2)=S(F_1)+S(F_2)$ (аддитивность).
4. $S(E)=1$.

Если вместо квадрата E взять другой E', то соответствующие числа S' отличаются от S только общим множителем:

$$S'(F)=kS(F);\quad k=S'(E)=\frac{1}{S(E')}. \tag{1}$$

В § 49—52 мы определили численные «площади» — числа $S(F)$, в частности для многоугольных фигур, и доказали, что для них они действительно обладают свойствами 1—4. Тем самым доказано существование численной площади у многоугольных фигур.

Остается доказать ее единственность при данном квадрате E и правило ее пересчета (1) для другого квадрата E'.

Единственность численной площади.

Теорема 1. *При данном единичном квадрате E численная площадь многоугольных фигур определяется однозначно.*

То есть если многоугольным фигурам сопоставлены числа S' со свойствами 1—4 теоремы I, то они представляют собою численные площади S, определенные с помощью квадратных сеток.

Доказательство. Допустим, что многоугольным фигурам отнесены числа $S'(F)$ со свойствами 1—4. Нужно доказать что $S'(F)=S(F)$. По свойству 4 $S'(E)=1$ и из инвариантности следует, что в каждой нашей сетке квадратам отвечает одно и то же значение $S'(E_n)$. Если в единичном квадрате их N_n, то

$$N_nS'(E_n)=S'(E)=1.$$

Но точно так же по нашему определению численной площади $N_nS(E_n)=1$. Стало быть,

$$S'(E_n)=S(E_n).$$

Поэтому при любой фигуре F

$$S'(F_n^i) = S(F_n^i), \quad S'(F_n^e) = S(F_n^e). \tag{2}$$

Для многоугольной фигуры F

$$F_n^i \subset F \subset F_n^e$$

и разности $F - F_n^i$ и $F_n^e - F$ представляют собой многоугольные фигуры (или пустое множество, если $F = F_n^i$) по аддитивности

$$S'(F) = S'(F_n^i) + S'(F - F_n^i),$$

а по свойству 1 $S'(F - F_n^i) \geqslant 0$. Поэтому $S'(F) \geqslant S'(F_n^i)$. Аналогично заключаем, что $S'(F) \leqslant S'(F_n^e)$. Таким образом, в силу равенства (2), получаем, что

$$S(F_n^i) \leqslant S'(F) \leqslant S(F_n^e).$$

При $n \to \infty$ крайние члены сходятся к $S(F)$ и, стало быть, $S'(F) = S(F)$, что и требовалось доказать.

Замена единицы площади.

Теорема 2. *При замене единицы площади все численные ее значения для многоугольных фигур изменяются на один и тот же множитель. Если E' — «новый» единичный квадрат и S' — определенная по нему численная площадь (т. е. когда $S'(E') = 1$), то для фигуры F*

$$S'(F) = kS(F), \quad k = S'(E) = \frac{1}{S(E')}.$$

Доказательство. Пусть E' — «новый» единичный квадрат и $k = S'(E)$ — численная площадь, какую получает при этом «первоначальный» единичный квадрат E. «Новая» численная площадь всякой фигуры G, состоящей из квадратов n-й сетки, построенной по E, будет равна сумме площадей S' составляющих ее квадратов (согласно доказанным свойствам численной площади). Если квадрат E_n n-й сетки составляет $1/N_n$ квадрата E, а число квадратов в фигуре G равно M_n, то

$$S'(G) = M_n \frac{S'(E)}{N_n} = S(G)\, S'(E),$$

так как $M_n/N_n = S(G)$ (по определению).

Поэтому для фигур F^i_{n}, F^e_{n}, построенных для любой фигуры F,

$$S'(F^i_n) = S(F^i_n)\,S'(E), \qquad S'(F^e_n) = S(F^e_n)\,S'(E).$$

Для многоугольной фигуры (по лемме 3 § 52) $F^i_n \subset \subset F \subset F^e_n$. Поэтому

$$S'(F^i_n) \leqslant S'(F) \leqslant S'(F^e_n)$$

и из предыдущих равенств

$$S(F^i_n)\,S'(E) \leqslant S'(F) \leqslant S(F^e_n)\,S'(E).$$

При $n \to \infty$ величины $S(F^i_n)$, $S(F^e_n)$ сходятся к $S(F)$. Поэтому в пределе получаем

$$S(F)\,S'(E) \geqslant S'(F) \geqslant S(F)\,S'(E),$$

т. е. $S'(F) = S(F)\,S'(E)$, что и требовалось доказать.

С доказательством теорем 1, 2 теорема I доказана полностью.

§ 54. Площадь немногоугольных фигур: теорема II, IIа

В § 48 были высказаны две теоремы о площади любых фигур, у которых площадь границы равна нулю. Теорема II говорит, что численная площадь этих фигур удовлетворяет тем же условиям, что и площадь многоугольных фигур. Теорема IIа утверждает, что площади этих фигур можно находить, как находят площадь круга, по площадям «вписанных» и «описанных» многоугольных фигур. Здесь мы докажем сначала теорему IIа, а потом — теорему II и установим еще одно важное свойство фигур с определенной площадью.

Нахождение площади посредством многоугольных фигур. Установим сначала общее условие существования площади.

Теорема 1а. *Если для фигуры F существуют такие фигуры $G \supset F$ и $H \subset F$ с определенными площадями, что разности их площадей сколь угодно малы, то F имеет определенную площадь и она равна общему пределу площадей $S(G)$, $S(H)$.*

Доказательство. Если $G \supset F \supset H$ и фигуры G, H имеют площади $S(G)$, $S(H)$, то (по теореме 3 § 50)

$$S(G) \geqslant S_e(F) \geqslant S_i(F) \geqslant S(H).$$

Поэтому если разность $S(G)-S(H)$ может быть сколь угодно малой, то $S_e(F)=S_i(F)$, т. е. F имеет определенную площадь $S=S_e=S_i$. И беря фигуры G_n, H_n так, чтобы $S(G_n)-S(H_n)\to 0$, получим, что

$$S(G_n)\to S(F), \quad S(H_n)\to S(F).$$

Теорема доказана.

В частности, фигуры G, H могут быть многоугольными. Поэтому в доказанной теореме содержится утверждение: *если для фигуры F существуют многоугольные фигуры $G\supset F$, $H\subset F$ со сколь угодно малой разностью площадей, то F имеет определенную площадь.*

Выполняется также обратное утверждение:

Теорема 1б. *Если фигура F имеет определенную площадь $S(F)$, то существуют такие многоугольные фигуры: G_n, H_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, что $G_n\supset F\supset H_n$ и $S(G_n)\to S(F)$, $S(H_n)\to S(F)$.*

Доказательство. По принятому здесь определению площадь

$$S(F)=\lim S\left(F_n^i\right)=\lim S\left(F_n^e\right).$$

Фигура F_n^i состоит из квадратов, внутренности которых содержатся в F. Построив внутри каждого такого квадрата квадрат, к нему достаточно близкий, можно получить многоугольную фигуру $H_n\subset F$ с площадью, как угодно близкой к $S\left(F_n^i\right)$. Получим такую последовательность многоугольных фигур $H_n\subset F$, что $S(H_n)\to S(F)$.

Фигура F_n^e состоит из квадратов, внутри которых содержатся точки из F. Но у фигуры F могут быть еще точки, лежащие на сторонах квадратов сетки. Все такие стороны можно окружить прямоугольниками сколь угодно малой площади. Присоединив их к фигуре F_n^e, получим многоугольную фигуру G_n с площадью, сколь угодно близкой к F_n^e. Получим такую последовательность многоугольных фигур $G_n\supset F$, что $S(G_n)\to S(F)$. Теорема доказана.

Теорема 1б вместе с теоремой 1а дают следующую теорему:

Теорема 1. *Фигура F имеет определенную площадь в смысле определения с помощью квадратных сеток тогда и только тогда, когда существуют содержащие ее и содержащиеся в ней многоугольные фигуры G и H $(G\supset F\supset H)$ со сколь угодно малой разностью площадей*

$S(G)-S(H)$. *Площадь фигуры F равна при этом общему пределу площадей $S(G)$, $S(H)$.*

Равенство площадей равных фигур.

Теорема 2. *Если фигура F имеет определенную площадь, то всякая равная ей фигура тоже имеет определенную площадь, и притом ту же самую.*

Доказательство. Пусть F — фигура с определенной площадью $S(F)$, а F' — фигура, ей равная, т. е. полученная из F некоторым перемещением d: $F'=dF$. По теореме 1б существуют такие многоугольные фигуры: G_n и H_n, $G_n \supset F \supset H_n$, что

$$S(G_n)\to S(F), \qquad S(H_n)\to S(F). \tag{1}$$

Так как $G_n \supset F \supset H_n$, то для фигур G_n', H_n', полученных из G_n, H_n тем же перемещением d, будет

$$G_n' \supset F' \supset H_n'.$$

Поэтому

$$S(G_n') \geqslant S_e(F') \geqslant S_i(F') \geqslant S(H_n'). \tag{2}$$

Но так как фигуры G'_n, H_n' равны многоугольным фигурам G_n, H_n, то по теореме 1 § 53 площади их те же. Поэтому предыдущие неравенства (2) можно переписать так:

$$S(G_n)\geqslant S_e(F')\geqslant S_i(F')\geqslant S(H_n).$$

По соотношениям (1) крайние члены здесь, при $n\to\infty$, стремятся к одному и тому же пределу $S(F)$. Поэтому в пределе получаем

$$S(F)\geqslant S_e(F')\geqslant S_i(F')\geqslant S(F).$$

То есть

$$S_e(F')=S_i(F')=S(F).$$

Это значит, что фигуры F' имеют определенную площадь, и притом равную $S(F)$, что и требовалось доказать.

Совокупность фигур определенной площади. Следующая теорема дает основание получать из фигур определенной площади другие такие фигуры.

Теорема 3. *Объединение и пересечение любого конечного числа фигур определенной площади, как и разность двух таких фигур, всегда оказывается фигурой с определенной площадью* (здесь «разность» фигур F, F' — в обозначениях $F\setminus F'$ — это множество всех точек, принадлежащих F, но не принадлежащих F').

Доказательство. Достаточно доказать сказанное для двух фигур: если фигуры F_1, F_2 имеют определенную площадь, то ее имеют также и фигуры $F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2$, $F_1 \backslash F_2$. Наличие определенной площади равносильно тому, что площадь границы равна нулю. Поэтому теорема сводится к тому, что если у F_1, F_2 площадь границы равна нулю, то же будет и у фигур $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$, $F_1 \backslash F_2$.

Нетрудно доказать, что границы трех последних фигур всегда содержатся в объединении границ самих F_1 и F_2. А тогда по лемме об объединении фигур нулевой площади объединение границ фигур F_1 и F_2 тоже имеет нулевую площадь.

Таким образом, если $S(\partial F_1) = S(\partial F_2) = 0$, то $S(\partial F_1 \cup \partial F_2) = 0$, а вместе с этим равны нулю площади границ объединения, пересечения и разности. Таким образом, теорема доказана.

Единственность площади.

Теорема 4. *Площадь фигур, у которых площадь границы равна нулю, определяется однозначно.*

То есть если для этих фигур заданы числа S' с теми же условиями, как в теореме I, лишь с заменой условия 1 на $S' \geqslant 0$, то эти числа совпадают с численной площадью S.

Доказательство. Для площади многоугольных фигур единственность установлена теоремой 1 § 53, а согласно теореме 1 площади других фигур определяются по площадям многоугольных фигур, поэтому их площади тоже определяются однозначно. Подробнее это соображение представляется следующим образом.

Пусть фигурам с определенной площадью сопоставлены числа S' с указанными в теореме свойствами. Пусть $F \supset H$, где F, H — фигуры с определенной площадью, тогда по теореме 3 $F \backslash H$ — тоже фигура с определенной площадью. Стало быть, по аддитивности чисел S'

$$S'(F) = S'(H) + S'(F \backslash H),$$

и так как $S' \geqslant 0$, то $S'(F) \geqslant S'(H)$.

Следовательно, если F — данная фигура, а G, H — такие многоугольные фигуры, что $G \supset F \supset H$, то

$$S'(G) \geqslant S'(F) \geqslant S'(H).$$

Для многоугольных фигур единственность площади доказана. Поэтому $S'(G) = S(G)$, $S'(H) = S(H)$ и последние неравенства можно переписать так:

$$S(G) \geqslant S'(F) \geqslant S(H).$$

По теореме 1 § 53 фигуры G, H можно взять так, чтобы $S(G)$ и $S(H)$ сколь угодно мало отличались от $S(F)$. Следовательно, $S'(F) = S(F)$; теорема доказана.

Итак, мы доказали теорему II: *Для фигур с границей нулевой площади однозначно определяется численная площадь со свойствами*:

1) $S(F) \geqslant 0$,
2) *если* $F' \cong F$, *то* $S(F') = S(F)$,
3) $S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2)$,
4) $S(E) = 1$.

В § 49 мы определили численную площадь S, причем свойства 1), 4) выполняются для нее непосредственно; свойство 2) установлено теоремой 2, а 3) — теоремой 1 § 50; единственность (однозначность определения) доказана последней теоремой 4.

Таким образом, теорема II полностью доказана.

Дополнение. Аналогично теореме 1б можно доказать, что

Для любой фигуры F и многоугольных фигур G и H, $G \supset F \supset H$,

$$S_e(F) = \inf S(G), \quad S_i(F) = \sup S(H).$$

Отсюда, аналогично теореме 2, доказывается, что

Если $F' \cong F$, то $S_e(F') = S_e(F)$, $S_i(F') = S_i(F)$.

Сами теоремы 1 и 2 являются частными случаями этих общих утверждений.

§ 55. Еще о фигурах с определенной площадью

В нашем распоряжении есть два критерия того, что фигура имеет определенную площадь. Первый — это то, что площадь границы фигуры равна нулю. Второй состоит в том, что фигура включается и включает многоугольные фигуры со сколь угодно малой разностью площадей.

Однако оба эти критерия недостаточно наглядны: они не позволяют по виду самой фигуры сразу определить, что она имеет определенную площадь. Поэтому желательно найти хотя бы и более частные, но наглядные условия; пока мы установили только одно такое условие — что фигура многоугольная. Но его можно значительно обобщить.

Теорема 1. *Фигура имеет определенную площадь, если ее граница является объединением конечного числа фигур (линий), каждая из которых представляется в подходящих координатах уравнением $y = f(x)$ с непрерывной функцией f на некотором промежутке $[a, b]$.*

Это теорема III § 48. Отложив пока доказательство этой теоремы, укажем другую.

Теорема 2. *Фигура имеет определенную площадь, если ее граница не имеет внутренних точек*[1]) *и существуют две такие пересекающиеся прямые, что всякая прямая, параллельная одной из них, пересекает границу по конечному числу (или даже по счетному множеству) отдельных точек и отрезков (либо вовсе ее не пересекает).*

Если фигура содержит свою границу, то граница заведомо не имеет внутренних точек, так что в этом случае остается только второе условие теоремы.

Условия теоремы выполняются, например, для любых выпуклых фигур и их объединений в конечном и даже счетном числе (многоугольные фигуры сюда включаются).

Однако эту теорему мы не будем здесь доказывать, так как ее доказательство сложно.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что при ее условиях площадь границы фигуры равна нулю. То есть достаточно доказать, что если фигура служит объединением конечного числа кривых $y = f(x)$ с непрерывными функциями f, то ее площадь равна нулю. А для этого достаточно доказать то же для одной такой кривой, т. е. доказать следующее.

Лемма 1. *Фигура (кривая), представимая в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$ с непрерывной функцией f, имеет нулевую площадь.*

Доказательство. Пусть кривая F задана уравнением $y = f(x)$ с непрерывной f на некотором промежутке $[a, b]$. Функция, непрерывная на замкнутом промежутке, равномерно непрерывна. Это значит, что при любом положительном ε найдется такое $\delta > 0$, что на

[1]) Например, граница фигуры, состоящей из параллельных отрезков, плотно расположенных на квадрате, или фигуры, составленной из всех точек квадрата с рациональными координатами, представляет собою квадрат.

всяком промежутке длины, не большей δ, колебание функции оказывается меньше ε. Геометрически это означает, что кривая F над отрезком длины не больше δ может быть заключена в прямоугольник с высотой ε; основание его параллельно оси x и не больше δ (рис. 135).

Разделим весь промежуток $[a, b]$ на промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ с длинами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, меньшими δ. Тогда

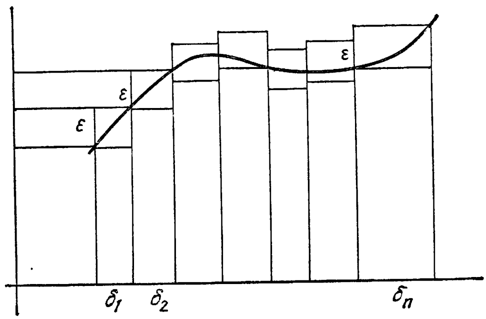

Рис. 135

кривую F можно включить в фигуру G, состоящую из прямоугольников высоты ε, лежащих над взятыми промежутками Δ_k. Площадь такого прямоугольника $S_k = \varepsilon\delta_k$. Поэтому площадь всей фигуры G будет

$$S(G) = \sum S_k = \varepsilon \sum \delta_k = \varepsilon(b-a).$$

Так как $F \subset G$, то $S_e(F) \leqslant S(G)$ и, стало быть,

$$S_e(F) \leqslant \varepsilon(b-a).$$

А так как ε можно взять сколь угодно малым, то $S_e(F) = 0$. Таким образом, лемма 1 доказана, а вместе с этим доказана и теорема 1.

Площадь и интеграл. Между интегралом и площадью есть хорошо известная связь.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на промежутке $[a, b]$. В прямоугольных координатах она представляется кривой $y = f(x)$. Эта кривая F вместе с отрезком $[a, b]$ и отрезками, проведенными из его концов параллельно оси y, ограничивает некоторую фигуру T (понятно, если конец кривой F совпадает с концом отрезка $[a, b]$, то отрезок из этого конца не проводится). Если кривая не имеет общих точек с осью x, то эта фигура представляет «криволинейную трапецию». Вообще говоря, фигура T может состоять из двух фигур T_+ и T_-, расположенных над осью x и под ней (рис. 136). Отрезок $[a, b]$ можно отнести и к той, и к другой фигуре. (Тогда фигура T_+ ограничена кривой $y=f(x)$, где $f(x)>0$, и $y=0$, там,

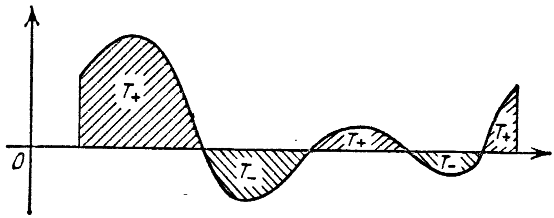

Рис. 136

где $f(x)\leqslant 0$; тут она лежит на оси x. Для T_- — аналогично.)

Согласно теореме 1 фигуры T_+, T_- имеют определенную площадь $S(T_+)$, $S(T_-)$ и вместе с тем

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(T_+) - S(T_-).$$

Доказательство существования интеграла непрерывной функции совпадает с доказательством существования

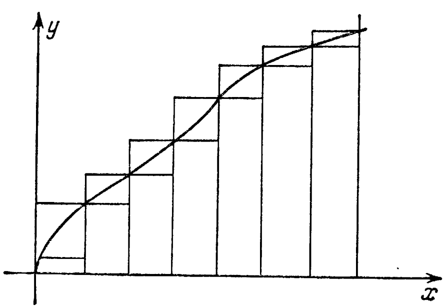

Рис. 137

площади у фигур такого вида, как T_+ и T_-. Говоря геометрически, рассматриваются ступенчатые фигуры, заключающие такую фигуру T и заключенные в ней (рис. 137), и доказывается что их площади имеют общий предел, когда промежутки, на которые разбивается промежуток $[a, b]$, безгранично измельчаются. Разность таких фигур образует многоугольную фигуру, заключающую ту кривую, которая ограничивает T, и доказательство сводится к тому, что площади таких фигур стремятся к нулю, т. е. что площадь кривой F равна нулю.

Именно это и было доказано выше в лемме 1.

Таким образом, *существование интеграла непрерывной функции и существование площади у соответствующей фигуры T — это одно и то же*, и, доказав выше существование ее площади, мы фактически доказали существование интеграла непрерывной функции.

§ 56. Объем

Здесь мы будем рассматривать ограниченные фигуры в пространстве любого числа измерений. Будем говорить, как о фигурах на плоскости, что фигура составлена из нескольких фигур, если она служит их объединением и никакие две из них не имеют общих внутренних точек. Пишем $F = F_1 + F_2 + \ldots$

Фигуру назовем многогранной, если ее граница содержится в конечном числе плоскостей, содержится в фигуре и является границей ее внутренности.

Понятие объема определяется так же, как понятие площади, с той лишь разницей, что на место многоугольных фигур ставятся многогранные фигуры; и все выводы, какие были сделаны для площади, переносятся на объем.

Объемом многогранной фигуры называется величина со свойствами инвариантности и аддитивности, т. е.: 1) равные фигуры имеют один и тот же объем; 2) если фигура составлена из нескольких многогранных фигур, то ее объем равен сумме их объемов.

Соответственно определяется численный объем $V(F)$ при данной единичной фигуре E: это такое число, что

1) $V(F) > 0$;
2) если $F \cong F'$, то $V(F) = V(F')$;
3) $V(F_1 + F_2) = V(F_1) + V(F_2)$;
4) $V(E) = 1$. За E принимают единичный куб.

Аналогично теореме I § 48 о площади выполняется

Теорема 1. *При заданной единичной фигуре E каждой многогранной фигуре отвечает, и притом единственное, число со свойствами 1—4. Если фигуру E за-*

менить на E', то все численные объемы умножатся на один и тот же множитель:

$$V'(F) = kV(F); \quad k = V'(E) = \frac{1}{V(E')}.$$

Для любых фигур принимают определение.

Объемом фигуры F называется величина, которая не больше объемов многогранных фигур, содержащих F, и не меньше объемов многогранных фигур, содержащихся в F, при условии, что разности этих объемов могут быть сколь угодно малыми.

Тогда говорим, что фигура имеет определенный объем; иначе у нее нет определенного объема.

Теорема 2. *Фигура имеет определенный объем тогда и только тогда, когда объем ее границы равен нулю. Для таких фигур объем обладает всеми свойствами объемов многогранных фигур, указанными в теореме* 1.

Доказательство теорем 1, 2 может быть построено совершенно так же, как доказательство соответствующих теорем I, II для площади, исходя из определения объема по способу его измерения. Именно, объем можно определить как величину, измеряемую числом кубических единиц, заключающихся в фигуре и покрывающих фигуру, если у этих чисел есть общий предел.

Пространство разбивается на единичные кубы E_1, примыкающие друг к другу целыми гранями, так что они образуют кубическую решетку. Этим кубам приписывается значение $V(E_1) = 1$. Эти кубы делятся на равные кубы E_2 и получается вторая решетка; если при этом каждый куб E_1 делится на N_2 кубов E_2, то этим кубам приписывается $V(E_2) = 1/N_2$. Затем кубы E_2 делятся на равные и т. д. Получаем последовательность неограниченно измельчающихся кубических решеток.

Объем фигуры определяется с помощью этих решеток буквально так же, как определялась площадь с помощью квадратных клеток.

Последующие доказательства свойств объема происходят дословно так же, как для площади, лишь с тремя отличиями:

1) вместо квадратов нужно говорить о кубах;

2) вместо доказательства того, что площадь отрезка равна нулю, нужно доказывать, что объем квадрата равен нулю (поскольку любой многоугольник можно заключить в квадрат);

3) вместо отражения в прямой нужно при доказательстве инвариантности объема, воспользоваться отражением в плоскости.

В остальном все выводы проходят так же, как для площади. Они будут те же и в n-мерном пространстве — для n-мерного объема. Тогда в п. 2) нужно рассматривать не квадрат, а $(n-1)$-мерный куб.

Читатель сможет сам провести все эти выводы с немалой пользой.

Достоинство проведенного выше доказательства существования площади состоит, между прочим, как раз в том, что оно без изменений переносится на объем любого числа измерений.

Однако при полной аналогии общей теории площади и общей теории объема в теории площади многоугольников и объема многогранников есть принципиальная разница. Для многоугольников выполняется следующая замечательная теорема.

Два многоугольника одинаковой площади можно разбить на равные треугольники, т. е. так, что каждому треугольнику разбиения одного из данных многоугольников соответствует равный ему треугольник в разбиении другого многоугольника.

Эту теорему кратко выражают словами:

Равновеликие многоугольники являются равносоставленными — составляются из равных треугольников.

Равновеликими вообще называются фигуры равной площади, а также равного объема.

Для многогранников подобная теорема не выполняется. Даже два равновеликих тетраэдра далеко не всегда оказываются равносоставленными. Поэтому равенство объемов пирамид с равными основаниями и высотами не может быть установлено элементарными средствами, как это возможно для треугольников, а требует либо применения интегрального исчисления, либо приема, представляющего, по существу, выражения объема интегралом.

ГЛАВА 9

ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 57. Начало геометрии — до Евклида

Подлинные начала и основания геометрии, как уже было сказано еще в § 1, лежат в объективной действительности, в материальной практической деятельности людей. Отсюда шло восхождение в область абстрактного мышления, где формировались и изменялись как понимание предмета геометрии, так и ее исходные положения. Теоретические основания геометрии образуются соединением этих двух компонент: взгляда на ее предмет и ее исходных положений. История оснований геометрии и есть история восхождения в область абстракции через ряд существенных этапов. Переход от практики к аксиоматике, который мы произвели в гл. 1 и 2, хотя и соответствовал сути дела, недостаточно отражал, однако, подлинную историю.

Первоначальные геометрические понятия возникли у людей в глубочайшей древности и постепенно расширялись и уточнялись с развитием практической деятельности, когда люди оценивали расстояния, делали прямые копья и стрелы, сравнивали их по длине и т. п. Потом с развитием земледелия были выработаны в практике правила измерения земельных участков, правила нахождения простейших площадей и объемов, правила, необходимые для строительства и др. Эти простые правила сравнения фигур, нахождения геометрических величин, правила простейших геометрических построений и составили начала геометрии как прикладной науки, как собрания правил решения практических задач[1]). Такие зачатки геометрии складывались в древних земледельческих обществах (в Египте, в Месопотамии, в дельте Инда, в Китае; самое древнее дошедшее до нас в отрывках сочинение из Египта с решением геометрических задач отно-

[1]) Понятие «наука» толкуют по-разному, но в данном случае мы имеем в виду то, что сказано: «собрание правил...».

сится к XVII—XVI вв. до н. э., но оно, конечно, не было первым). На этом уровне геометрия достигла заметного развития; были установлены многие ее факты как, например, теорема Пифагора, приближенное выражение объема шара и др., но не как логически доказанные теоремы, а как выводы из опыта. Впрочем, это противопоставление вывода из наблюдения и логического доказательства не следует преувеличивать, и мы это еще обсудим. До нас дошли только жалкие отрывки того, что знали в Египте по геометрии, и есть основания думать, что там не только знали больше, но и проводили хотя бы некоторые доказательства[1]).

Практические правила постепенно приводились в систему, одни правила стали выводиться из других и обосновываться рассуждениями. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы — в предложения, которые доказываются рассуждением без прямых ссылок на опыт; появились также задачи и выводы, имеющие умозрительный, теоретический интерес; сложилось представление об идеальных геометрических фигурах. Геометрия становится, таким образом, теоретической наукой. Тогда же складывалась теоретическая арифметика, начала теории чисел, так что в целом возникла «чистая» математика. Как проходил этот процесс, точно не известно. Но во всяком случае известно, что геометрия оформилась в Греции в период VII—V вв. до н. э. Имена первых греческих геометров — или, лучше сказать, философов, занимавшихся геометрией — Фалеса (ок. 625—547 гг. до н. э.) и Пифагора (ок. 580—500 гг. до н. э.) сохранились в названиях известных теорем. Факт, составляющий содержание теоремы Пифагора, был известен раньше, но можно думать, что Пифагор нашел доказательство[2]). Есть сведения, что Пифагор ставил общую задачу доказательства теорем и тем самым — развития геометрии как теоретической науки, а в пифагорейском афоризме — «числа правят миром», в идее математической гармонии мира можно видеть первый замысел того, что можно назвать математическим естествознанием, о чем много ве-

---

[1]) Есть указание, что еще Демокрит (ок. 460—370 гг. до н. э.) гордился тем, что превзошел египетских землемеров в построениях и доказательствах.

[2]) Есть легенда, что на радостях открытия Пифагор принес жертву в сто быков. Отчего теперь, как говорят, «все скоты дрожат, когда открывается новая истина».

ков спустя писал, например, Галилей. Такие фундаментальные идеи зарождаются, складываются и развиваются постепенно. Поэтому не нужно ни приуменьшать, ни преувеличивать значение и содержание того, что думали, говорили и делали люди от древности до наших дней. В частности, это важно для лучшего понимания развития оснований геометрии.

В конце V в. до н. э. греческий геометр Гиппократ Хиосский (т. е. с острова Хиоса) создал сводное сочинение по геометрии — «Начала», до нас, однако, не дошедшее. Он же, как и другие греческие геометры того времени, занимался тонкими теоретическими вопросами геометрии. Таким образом, несомненно, что в то время геометрия уже сложилась как наука с ее системой выводов и теоретических задач.

Этот процесс формирования геометрии от правил измерения земельных участков до логической системы теорем кратко и красиво охарактеризован в словах Евдема Родосского, которые были приведены в самом начале нашего изложения.

Важнейшим событием в геометрии того времени — в V в. до н. э., было открытие несоизмеримых отрезков; диагональ квадрата не соизмерима со стороной: их отношение не выражается отношением целых чисел. Раньше думали, что отношение любых величин можно выразить рациональным числом, но выяснилось, что это неверно.

До того великий философ и ученый Демокрит развил взгляд на геометрические фигуры как на состоящие из мельчайших частиц — «амер». Согласно этому взгляду отношение отрезков выражается отношением числа таких частиц [1]). Опираясь на это представление, он создал как бы прообраз интегрального исчисления, находя объемы суммированием тонких слоев. Он получил таким путем важные результаты. Теория его оказалась, однако, неверной (явление обычное и характерное для научных теорий).

В целом открытие несоизмеримых отрезков не только оказало глубокое влияние на понятие о геометрических фигурах и произвело чрезвычайное впечатление на греческую мысль в геометрии и философии. В нем откры-

[1]) Не следует смешивать амеры как частицы идеальных фигур с атомами, образующими материальные тела. Здесь, говоря о Демокрите, мы следуем С. Я. Лурье, крупному советскому исследователю античной науки.

валось понятие математической непрерывности, понятие о континууме, которое на протяжении веков служило и продолжает служить предметом затруднений и глубочайших исследований от известных парадоксов Зенона до резких споров интуиционистов против «формалистов» в начале нашего столетия, от зарождения понятия о вещественном числе до нестандартного анализа и современного решения проблемы континуума.

Теория отношений несоизмеримых величин была создана Евдоксом (ок. 408—355 гг. до н. э.) — по-видимому, величайшим греческим ученым в области математики[1]. Его теория остается и поныне образцом строгого логического построения. В связи с этим он высказал аксиому, называемую аксиомой Архимеда (хотя сам Архимед приводил ее как известную). Однако до обобщения понятия числа — до понятия об иррациональных числах — греки не дошли; это понятие складывалось гораздо позже, уже в Индии и Средней Азии.

Но независимо от этого можно сказать, что с «Началами» Гиппократа и теорией Евдокса греческая геометрия приобрела в своих основах ту форму, в какой она просуществовала до конца прошлого столетия и в какой мы в основном воспринимаем ее и теперь, хотя, конечно, понимание и анализ ее предмета и основ чрезвычайно продвинулись с того времени.

§ 58. «Начала» Евклида

Основные достижения греческой геометрии до 300 г. до н. э. были систематизированы и изложены Евклидом (ок. 339—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала». Там содержатся только основы геометрии того времени, но, например, известные к тому времени результаты, касающиеся конических сечений, не затрагиваются. «Начала» состоят из тринадцати книг или, как мы теперь сказали бы, глав; книги I—IV и VI посвящены планиметрии, XI—XIII — стереометрии, а остальные содержат элементы теории чисел и геометрически изложенной ал-

[1]) Вместе с теорией отношений Евдокс создал метод нахождения площадей и объемов, известный как «метод исчерпывания», которым потом с особым успехом пользовался Архимед. Кроме того, Евдокс создал — возможно, первую — модель движения Солнца, Луны и планет и тем, можно сказать, создал первую математическую теорию естествознания.

гебры, так что в целом «Начала» представляют изложение основ не одной геометрии, а математики того времени вообще (хотя в ней геометрия занимала господствующее, можно сказать подавляющее, положение).

Каждая книга «Начал» открывается определениями тех понятий, которые впервые появляются в этой книге. Первая книга начинается с 23-х определений. Вот первые из них[1]).

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же — длина без ширины.
3. Концы же линии — точки.
4. Прямая линия есть та, которая ровно расположена по отношению к точкам на ней.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы же поверхности — линии.
7. Плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий.

Дальше идут определения — прямого, острого и тупого углов, треугольника и другие, в общем равносильные принятым в настоящее время.

За определениями следуют основные положения, принимаемые без доказательств — «постулаты» и «общие понятия» «аксиомы»). Принцип этого деления исходных положений на постулаты и аксиомы не совсем ясен; в разных списках «Начал» это деление проводится различно (кроме того, есть мнения, что некоторые аксиомы были добавлены к тексту Евклида позже; и также не известно точно, какие постулаты, аксиомы и определения Евклид заимствовал у своих предшественников; несомненно, он заимствовал у Гиппократа Хиосского, но насколько — не известно).

Бесспорно признают три постулата, они формулируются у Евклида так:

«Допустим:

1. Что от каждой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжить прямо.
3. И что из всякого центра, всяким раствором может быть описан круг».

---

[1]) Мы цитируем по изданию: Евклид. Начала. Книги I—VI/ Перевод и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского.— М.: Л.: Гостехиздат, 1948.

Знаменитый V постулат (в других списках 11-я аксиома)[1], равносильный аксиоме параллельности, гласит: «если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие (вместе) двух прямых, то неограниченно продолженные эти две прямые встречаются с той стороны, где углы меньше двух прямых» (рис. 138).

За постулатами следуют «общие понятия» (аксиомы); они открываются двумя следующими:

1. Равные одному и тому же, равны и между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны...

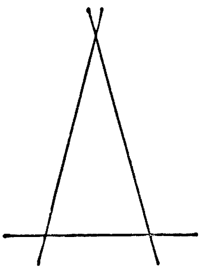

Рис. 138

За аксиомами следуют теоремы и задачи на построение под общим названием «предложения»; они расположены в строгой последовательности так, что каждое последующее опирается на предыдущее, а также на постулаты и аксиомы. Первым предложением является задача: «На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник». Четвертое предложение представляет первую теорему — «первый случай равенства треугольников»; пятое — теорему об углах равнобедренного треугольника и т. д.

Теперь рассмотрим приведенные нами элементы «Начал»: определения, постулаты и т. д.

Начальные определения Евклида являются описаниями основных объектов геометрии, но не их формальными определениями, которые для основных понятий и невозможны. Эти евклидовы определения критикуют и называют «дефектными», но не основательно. Определение точки точно выражает ее место в геометрии; теперь говорят, что точка — элемент множества, которое представляет собою плоскость, она не имеет ни частей, ни свойств сама по себе.

Определение линии и поверхности можно считать равносильным тому, как их определяли геометры XIX века: линия — это одномерная протяженность, поверхность — двумерная. Одно измерение линии — длина; у поверхности два измерения — длина и ширина.

[1]) Название «пятый постулат» более распространенно, но заметим, что у Бояи говорится об «одиннадцатой аксиоме».

То, что границы линии — точки, а границы поверхности — линии, выражает, примерно, то же, что теперь принимают за определение числа измерений. Точка нульмерна, линия одномерна, так как малая ее часть выделяется точками, поверхность двумерна, так как ее части выделяются линиями[1]).

Определение угла как наклонения одной линии к другой выражает сущность этого понятия лучше, чем определение его как пары лучей, или ограниченной двумя лучами части плоскости. Угол в треугольнике, вписанный угол в окружности и др. понимают на самом деле по Евклиду.

Три первых приведенных выше постулата выражают возможность основных построений. При этом важно понимать, что «прямая» у Евклида не бесконечная, а конечная, но допускающая неограниченное продолжение. Когда, как в предложении 1, говорится об «ограниченной прямой», то имеется в виду прямая с фиксированными «границами» — точками, т. е. определенный отрезок. Вообще же «прямая» мыслится как свободно продолжаемая. Понятие бесконечной прямой, как данной в ее бесконечности, было чуждо грекам.

Точно так же после открытия несоизмеримых отрезков, опровергнувшего представления о частицах геометрических фигур, прямая мыслилась греками как непрерывная, неограниченно делимая, но не состоящая из точек. Так же, например, окружность: на ней есть точки, она геометрическое место точек, но не состоит из точек. Это соответствует наглядному представлению, тем более — построению: прямую проводят по линейке, окружность описывают циркулем, но не строят по точкам; это и невозможно.

Аксиомы Евклида относятся прежде всего к величинам, к любым величинам, будь то длина отрезка, величина угла, площадь треугольника или многоугольника. «Равные» означает у Евклида «равновеликие», так что, скажем, для треугольников это означает равенство площадей. Это понимание равенства, как и понимание «пря-

[1]) Вообще, фигура (пространство) n-мерна, если сколь угодно малая окрестность точки в ней ограничивается $(n-1)$-мерной фигурой. Так, в определении Евклида можно видеть зачаток современного определения числа измерений в топологической теории размерности. Впрочем, конечно, не следует преувеличивать эту связь.

мой», очень ясно видно в евклидовой формулировке предложения 4.

«Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому».

Конечно, в постулатах и аксиомах Евклида нет многого из того, чем он на самом деле пользуется в доказательствах. Это понятие о совмещении или наложении фигур, которое используется уже в доказательстве первой теоремы — предложения 4, а также в аксиоме 7: «совмещающиеся равны». Это понятие о строении прямой, о порядке точек на ней, которое неявно присутствует постоянно, когда, например, говорится о разделении прямой на отрезки и т. п. Это также понятие о расположении фигур с той или с другой стороны от прямой; понятия, связанные с непрерывностью (например, о пересечении прямой и окружности) и др.

Однако нет ничего удивительного в том, что все это считалось само собой понятным, входящим в само понятие прямой, окружности и плоскости. Так же теперь, *когда говорят*, например, что *фигура «состоит из точек» или «является их совокупностью», то считают это само собой понятным, хотя можно спросить: в каком смысле «состоит»? Во всякой аксиоматике подразумевается что-то известным и само собой понятным.* Поэтому Евклида надо понимать как ступень выявления оснований геометрии, ступень, важнейшую как первую (если не говорить о предшественниках), за которой следуют другие ступени.

Ни в определениях, ни в постулатах и аксиомах Евклид, конечно, не отрывается от наглядных представлений: его система содержательна, но никак не формальна. Постулаты говорят о реальных построениях, хотя бы и в общей идеализированной форме. Соответственно, доказательства носят тот же характер, как бы мысленных экспериментов; как совмещение треугольников воспроизводит в мысли реальное наложение одного на другой. Обычное — содержательное, а не чисто формальное — изложение элементарной геометрии сплошь носит такой характер с большей или меньшей степенью абстракции, с дополнением возможного только мыслимым.

Достойно внимания, что уровень строгости Евклида не вызывал возражений, кроме разве частных замечаний комментаторов, вплоть до последней четверти XIX в.— настолько он совершенен.

«Начала» служили образцом научного изложения на протяжении 2000 лет, ему следовал, например, Ньютон в «Оптике» и в «Математических началах натуральной философии». Со времен Евклида все учили геометрию по его «Началам». Школьные учебники до самого последнего времени представляли, по существу, популярное изложение «Начал». Немногие произведения сравнимы с ними по долголетию.

§ 59. От Евклида до Лобачевского

После Евклида греческие ученые существенно продвинули геометрию в ряде направлений (развивали дальше методы нахождения площадей и объемов (Архимед, 287—212 гг. до н. э.), глубоко изучили конические сечения (Аполлоний, ок. 260—170 гг. до н. э.), положили начало тригонометрии (Гиппарх, 180—125 гг. до н. э.), начала геометрии на сфере (Менелай I—II вв.). и др.). После них ничего особенно существенного в геометрии долго не было сделано, так как, можно сказать, она была доведена ими до тех пределов, за которыми ее развитие требовало новых методов; ибо Архимед уже решал, по существу, задачи интегрального исчисления, а Аполлоний получал результаты аналитической геометрии, но без алгебры, без понятия о любом вещественном числе.

Это понятие складывалось постепенно (в Индии, в Средней Азии), на основе понятия об отношении отрезков, отношении любых геометрических величин, пока не было выработано определение числа как отношения величин вообще[1]). Таким образом, *понятие вещественного числа фактически выросло из оснований геометрии, но теперь, отделенное от нее, оно вносится в них извне, как уже известное.* Однако, при достаточно глубоком понимании оснований геометрии они не должны включать понятие числа, а оно само должно выводиться из них, как и

[1]) Возможно, первым, кто дал такое общее определение, был великий поэт и математик Омар Хайям (1048—1131); Ньютон в книге «Всеобщая арифметика» (1703) формулировал определение, которое представляется просто более четким выражением определения Хайяма.

было в действительности. И теперь при неформальном введении общего понятия об иррациональных числах объясняют, что они необходимы для измерения отрезков, несоизмеримых с единицей.

Новые методы, в которых нуждалась геометрия, были подготовлены развитием алгебры и понятия числа (в Индии, в Средней Азии, в арабских странах и позже в Европе) и были созданы в XVII в.— это метод координат и методы анализа бесконечно малых (Декарт, Ньютон, Лейбниц и др.). Результатом явилось совершенно новое, мощное развитие геометрии в виде аналитической и дифференциальной геометрии — общей теории кривых и поверхностей.

Однако при всем этом основы геометрии оставались такими же, как они были представлены в «Началах» Евклида. Особое место в них занимал пятый постулат, отличаясь от остальных постулатов и аксиом своей сложностью; и трудно было его признать очевидным, как остальные аксиомы и постулаты. Поэтому возникло стремление доказать его, вывести из других основных посылок геометрии. Есть сведения, что этим занимался уже Архимед, а может быть, и сам Евклид. Так началась долгая история попыток доказать V постулат. Но прежде, чем говорить о ней, рассмотрим ближе сам постулат. Он равносилен известной аксиоме параллельности: через точку вне прямой проходит только одна прямая, ей параллельная.

Действительно, как известно, легко доказывается, что если две прямые образуют с секущей с одной стороны углы, вместе равные 180°, то прямые параллельны. Поэтому если выполняется аксиома параллельности, так что через данную точку может проходить только одна прямая, параллельная данной, то прямые в постулате Евклида должны пересекаться и, как можно видеть, с одной стороны, где сумма углов меньше 180°. Таким образом, V постулат следует из аксиомы параллельности.

Обратно, если выполнен V постулат, то всякие две прямые, не образующие с секущей углы, в сумме равные 180°, должны пересекаться (так как тогда с одной из двух сторон сумма углов меньше 180°). Стало быть, не пересекаются только те, у которых сумма углов 180°, так что к данной прямой может быть только одна параллельная, проходящая через данную точку.

У Евклида параллельные прямые определяются в начале I книги и рассматриваются в ней в ряде предложений. Поэтому не совсем ясно, почему он не высказывает вместо V постулата аксиому параллельности. Можно думать, это связано с тем, что параллельность прямых означает, что они не встречаются (как говорит Евклид) и при неограниченном продолжении, так что для того, чтобы непосредственно убедиться в параллельности прямых, нужно пройти одну из них целиком, а это немыслимо. В пятом постулате этого нет, и он позволяет вывести признаки параллельности, проверяемые «тут же», где секущая пересекает две прямые[1].

Стоит еще отметить, что V постулат имеет простой, можно сказать практический, смысл: он утверждает возможность построить треугольник с данным основанием и углами при нем, в сумме меньшими 180°. По постулату прямые, проведенные под такими углами к основанию, пересекутся и тем самым треугольник получится.

Трем признакам равенства треугольников соответствуют построения треугольников: по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам, по стороне и двум углам при ней. В первом случае построение всегда возможно; во втором доказывается, что оно возможно при выполнении условия, что большая из сторон меньше суммы двух других. Но в третьем случае, условия, когда построение возможно, не устанавливаются из других предпосылок геометрии — условие это нужно особо постулировать.

Четкое выделение постулата и выявление его роли в выводах геометрии было важным достижением. Но постулат формулируется сложно, а сравнительная простота аксиомы параллельности только внешняя, так как за нею стоит понятие бесконечно проходимой прямой (которое греками и не мыслилось). Поэтому немудрено, что возникли, как уже сказано, попытки доказать постулат как

[1]) При современной привычке к понятию о бесконечной прямой, к понятию о существовании или несуществовании объекта (в данном случае точки пересечения), которые не подлежат проверке, а только мыслятся, эти соображения не представляются существенными, но это только свидетельствует о поверхностном взгляде. Более глубокое понимание выясняет, что есть существенное различие между процессом, который наверняка когда-нибудь кончится, и таким, который может никогда не кончиться.

теорему. Попытки эти, длившиеся свыше 2000 лет, были безуспешными[1]).

Они каждый раз сводились к тому, что постулат заменялся каким-нибудь другим утверждением, представлявшимся более очевидным. Например, греческий комментатор Евклида Прокл (V в.) доказывал V постулат, исходя из того, что параллельные прямые расположены на постоянном расстоянии друг от друга или по крайней мере на ограниченном (читатель сам может вывести отсюда V постулат).

Глубоко мыслящие математики понимали, что V постулат только заменяется другим, менее глубоким казалось, что доказательство им удалось.

Один из приемов состоял в рассмотрении четырехугольника с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами (рис. 139). Это та фигура, на которой мы формулируем «аксиому параллельных отрезков».

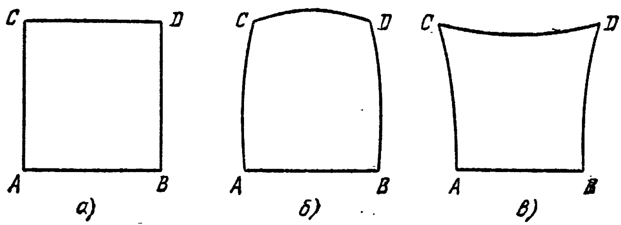

Рис. 139

По симметрии углы C, D равны и априори возможны три гипотезы: а) углы эти прямые, б) тупые, в) острые. Первая — «гипотеза прямого угла» равносильна постулату Евклида (см. § 21); «гипотеза тупого угла» исключается (она приводит к противоречию с тем, что прямые не могут пересекаться в двух точках). Остается «гипотеза острого угла»; ее опровержение означало бы доказательство V по-

---

[1]) Вот неполный перечень ученых, занимавшихся доказательством V постулата: греки Птолемей (II в.) и Прокл (V в.), араб ибн аль-Хайсам (конец X в.), персидский и таджикский поэт и математик Омар Хайям (ок. 1100 г.), азербайджанец Насир-ад-Дин ат-Туси (XIII в.), немец Шлюссель (1574), итальянцы Катальди (впервые в 1603 г. опубликовавший книгу, целиком посвященную вопросу о параллельных), Борелли (1638), Витале (1680), англичанин Валлис (1663—1693), итальянец Саккери (1733), швейцарец Ламберт (1766—1786), француз Лежандр (1800). Указаны даты, когда работа выполнена и опубликована.

стулата. Такой подход был еще у арабского математика Ибн аль-Хайсама (10 в.). Его развил итальянский ученый Саккери, опубликовавший в 1736 г. сочинение с «доказательством» V постулата («Евклид, очищенный от всяких пятен»). Саккери ведет доказательство от противного: приняв гипотезу острого угла, он делает из нее выводы, стремясь найти противоречие; выводы получались в высшей степени странные с точки зрения обычной геометрии, но логического противоречия не обнаруживалось (заключение Саккери, будто он доказал V постулат, было основано на ошибке).

Так же от противного пытался доказать V постулат швейцарский ученый Ламберт (труд его на эту тему был написан в 1766 г. и опубликован в 1786 г.). Он прошел в своих выводах очень далеко. Его выводы, так же как выводы Саккери, представляли собою фактически теоремы геометрии, в которой принималось отрицание V постулата. Ламберт даже высказал мысль, что она «справедлива на мнимой сфере». Можно сказать, он развил геометрию, основанную на отрицании V постулата; однако он не допускал мысли о возможности такой геометрии, неевклидовой.

§ 60. Переворот в геометрии

К смелой мысли о возможности геометрии, отличной от евклидовой, подошло почти одновременно несколько человек, но первый, кто выразил эту мысль совершенно четко и определенно и развил эту неевклидову геометрию, был Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Об этом он выступил с докладом в Казанском университете в 1826 г., а в 1829—30 гг. вышла его обширная работа с изложением основ новой геометрии. В 1832 г. венгерский математик Я. Бояи[1]), не зная о результатах Лобачевского, опубликовал работу с изложением той же теории. Как выяснилось впоследствии, К. Ф. Гаусс также пришел к выводу о возможности неевклидовой геометрии, но сообщал об этом лишь в частной переписке, воздерживаясь от публикации из боязни быть не понятым и подвергнуться нападкам. Действительно, очень немногие

[1]) Фамилию эту пишут по-разному. По-видимому, ближе всего к венгерскому произношению — Бояи. Венгерское его имя Янош передавали раньше по-немецки Иоганн.

математики того времени поняли и признали новую геометрию. Но Лобачевский продолжал ее развивать и публиковать развернутые работы, и когда потом она была признана, то получила название геометрии Лобачевского, а один английский математик назвал Лобачевского «Коперником геометрии».

До того времени все были убеждены, что возможна, мыслима лишь одна геометрия — та, основы которой изложены в «Началах» Евклида. Но произошел кардинальный переворот: рядом с той геометрией появилась еще другая. Затем возникли и другие геометрии: отделилась от евклидовой геометрии проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, а дальше — возникла общая теория пространств с произвольным законом измерения длин — риманова геометрия и др. Из науки о фигурах в одном трехмерном евклидовом пространстве геометрия за какие-нибудь 40—50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чем-то сходных со своей прародительницей — геометрией Евклида.

Однако это уже выходит за рамки нашего предмета — оснований самой евклидовой геометрии. Вернемся к геометрии Лобачевского в связи с основаниями геометрии.

Хотя геометрия Лобачевского развивалась у него как чисто умозрительная теория и сам он называл ее «воображаемой», тем не менее он рассматривал ее как возможную теорию реальных пространственных отношений. Однако попытки найти тому подтверждение из данных астрономии не дали результата. Вопрос о ее реальном смысле оставался открытым. Убеждение в ее логической правомерности было основано на том, что в ней при достаточно далеком ее развитии не обнаружилось противоречие, как нет его в геометрии Евклида. Но убеждение не заключало все же математического доказательства (к тому же геометрия Евклида была гораздо более продвинута, включая аналитическую и дифференциальную геометрию). Доказательство того, что геометрия Лобачевского логически столь же правомерна, как геометрия Евклида, не было тогда получено потому, что не были осознаны понятия, на которых такое доказательство могло быть основано. Вопрос был решен только в 1868 г.— почти 40 лет спустя после появления первой работы Лобачевского — итальянским геометром Бельтрами, который показал, что геометрия в областях плоскости Лобачевского осуществляется на поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, как их внутренняя геометрия[1]) (например, на псевдосфере, рис. 140). В целом же геометрия на всей плоскости и в пространстве Лобачевского представляется посредством соответствующей аналитической модели. После этого геометрия Лобачевского получила общее признание и вскоре были найдены другие, более простые ее истолкования (интерпретации или реализации).

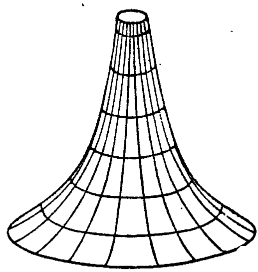

Рис. 140

Но замечательно, что все необходимое для выяснения найденного смысла геометрии Лобачевского и доказательства ее непротиворечивости было известно гораздо раньше. Внутреннюю геометрию поверхностей развил сам Гаусс в работе 1827 г. и показал, что на поверхностях отрицательной кривизны сумма углов треугольника меньше 180°, как в неевклидовой геометрии. Однако он не догадался сопоставить одно с другим, а в 1839 г. К. Миндинг (профессор университета в Дерпте — ныне Тарту) исследовал геометрию на поверхностях постоянной отрицательной кривизны и нашел формы тригонометрии, совпадающие с теми, какие были получены Лобачевским, и стоило их только сопоставить, как вывод о реализуемости геометрии Лобачевского на поверхностях был бы получен! Лобачевский, введя координаты в своей геометрии, мог бы догадаться, что это дает основание для ее аналитической интерпретации и, тем самым, для доказательства ее непротиворечивости.

Никто не догадался сделать тот или другой из этих выводов. Потому что не было, во-первых, осознано само понятие модели или интерпретации геометрии, и во-вторых, геометрия Лобачевского, как она строилась тогда, была слишком далека от теории поверхностей.

В 1854 г. немецкий математик Б. Риман (1826—1866) в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в Геттингенском университете, наметил об-

---

[1]) С современной точки зрения внутренняя геометрия поверхности объемлет те свойства поверхности и фигур на ней, которые определяются ее внутренней метрикой. Определение внутренней метрики дается в § 32.

щую аналитическую теорию геометрии пространств любого числа измерений и указал, в частности, на пространства, в которых реализуется геометрия Лобачевского (без явного указания на связь с работами последнего). Эта лекция осталась не понятой и была опубликована только в 1866 г. после смерти Римана. Но, ознакомившись в нею, Бельтрами немедленно опубликовал работу с развернутым представлением геометрии Лобачевского в пространстве как частного случая римановой геометрии и тем представил доказательство ее непротиворечивости, поскольку модель была чисто аналитической.

Вскоре после этого в 1871 г. немецкий математик Ф. Клейн указал более простую модель геометрии Лобачевского, которая в неявном виде содержалась в работе 1859 г. английского математика Кэли. Поэтому модель эта известна как модель Кэли — Клейна. Эта та самая модель внутри круга и шара, которая изложена в § 39, 40, 45.

Таким образом, геометрия Лобачевского имеет реальный, хотя и искусственный, смысл и столь же непротиворечива, как геометрия Евклида.

С точки зрения оснований геометрии в этом заключалось не только доказательство независимости V постулата — впрочем, уже полученное раньше Бельтрами. Здесь ясно выявилось понятие интерпретации (реализации) теории как изображения ее на почве другой уже известной теории и вместе с этим как средства доказательства как непротиворечивости теории, так и независимости ее аксиом. Доказательство независимости аксиомы состоит в доказательстве непротиворечивости теории, в которой эта аксиома, при сохранении всех остальных, отрицается.

Однако сами основания геометрии оставались, собственно, на том же уровне, на каком они были в «Началах» Евклида; они не были проанализированы глубже, чтобы выявить те предпосылки, которые не были явно выражены в аксиомах. Без этого, между прочим, сам вопрос о независимости аксиом не мог быть поставлен с достаточной точностью. Но решение этой задачи не было связано прямо с V постулатом и геометрией Лобачевского.

История V постулата и геометрии Лобачевского чрезвычайно поучительна и ясно показывает превратности путей познания. Усилия многих математиков на протяжении 2000 лет шли в ложном направлении, и нужен был гений, чтобы понять это. Но даже когда это было понято и доказательство, да не одно, было у многих под руками, его не видели, в немалой степени потому, что не было ясно, что нужно и как можно доказать. А все разрешилось простой моделью внутри круга. Вот она — геометрия Лобачевского... и ничего больше; все остальное — как леса при постройке — можно убрать.

Открытие и обоснование неевклидовой геометрии имело фундаментальное значение для понимания оснований геометрии, конечно не в том, что была установлена независимость аксиомы параллельности, а в том, что логическое построение геометрии было отделено от наглядного представления. Многие выводы, «факты» геометрии Лобачевского, будучи логически обоснованными, находились в самом резком противоречии с наглядными представлениями. Однако это отделение от наглядности было еще далеко неполным, в частности, прямая и плоскость представлялись интуитивно, и строение их в смысле расположения точек никак явно не выражалось. Поэтому стояла задача пополнить должным образом аксиомы Евклида. Это и было сделано позже.

§ 61. От Евклида до Гильберта — от геометрической наглядности до геометрической бессмыслицы

Параллельно решению вопроса о V постулате и вслед за ним развитие оснований геометрии шло в ряде направлений. Одно из важнейших заключалось в выработке общего понятия преобразования фигур и выяснении его фундаментального значения: были исследованы разные виды преобразований и, в частности, важные в самой элементарной геометрии движения или перемещения. Простейшая теорема о движениях на плоскости «теорема Шаля» была установлена только в то время — в первой половине XIX в. В алгебре возникло общее понятие группы и тут же вошло в геометрию: каждый из исследуемых видов преобразований пространства или плоскости, в частности движения, образовывали группу. Понятие движения было положено в основания геометрии в работе Г. Гельмгольца 1868 г. «О фактах, лежащих в основании геометрии». Гельмгольц был не математиком, а физиком и физиологом и, можно думать, поэтому-то он и смог увидеть основание геометрии в механическом движении твердых тел, как оно есть на самом деле. Приняв движение за основное понятие, можно было определить равные фигуры как такие, которые совмещаются, преобразуются одна в другую, посредством движения.

Затем в 1872 г. Ф. Клейн выдвинул общую идею, что геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях того или иного рода (при условии, что преобразования эти образуют группу). Под такое понимание геометрии подпадали, в частности, геометрии Евклида, Лобачевского, проективная и др. (но не общая риманова геометрия, введенная раньше Риманом).

Однако в этих работах с самого начала применялись координаты. Поэтому вопрос о чисто геометрическом изложении оснований геометрии в духе Евклида — по изречению древних «геометрия геометрически» (geometria geometrici) — оставался открытым. Основания здесь все еще понимались, собственно, на уровне Евклида. Для Лобачевского, скажем, не вставал вопрос о том, чтобы указать аксиомы порядка, определяющие расположение точек на прямой, порядок этот считался геометрически очевидным. (В этой связи можно отметить старание некоторых авторов школьных учебников ввести в них с самого начала аксиомы порядка, не для того ли, чтобы дети понимали геометрию лучше Лобачевского? Очевидное можно оставить для них очевидным.)

Общая тенденция к повышению математической строгости во второй половине XIX в. выразилась в геометрии в стремлении пополнить аксиомы евклидовой геометрии, чтобы по возможности полностью указать все, что на самом деле использовалось в доказательствах.

Первым крупным достижением на этом пути явилось исследование М. Паша, опубликованное в 1882 г. Паш считал, что основные положения геометрии должны быть заимствованы из опыта, но дальнейшее развитие ее должно идти путем чисто логических умозаключений. Соответственно, в его аксиомах речь идет об отрезках и ограниченных кусках плоскости. Под теми и другими понимаются некоторые совокупности точек, но какие именно и что нужно понимать под точкой, не определяется; все, что о них нужно знать, формулируется в аксиомах. Таким образом, Паш осуществляет аксиоматическое построение геометрии. Наибольшая его заслуга состояла в формулировке аксиом порядка. Порядок расположения точек на прямой, так же как расположение их относительно прямой на плоскости, представляется очевидным, и нужно было, выделив его основные свойства, выразить их в аксиомах, полностью обеспечивающих необходимые выводы; одна из этих его аксиом известна как аксиома Паша. Однако в целом система Паша оказалась слишком громоздкой: отказавшись включить в основные объекты бесконечную прямую и плоскость, он не смог добиться компактности аксиом.

Еще раньше, до Паша, были установлены разные формы аксиомы непрерывности, не столько даже в связи с основаниями геометрии, как в связи с основами анализа, с построением теории вещественных чисел. Ввиду соответствия точек прямой и вещественных чисел свойства расположения и непрерывности ряда тех и других равносильны. Разные формы аксиомы непрерывности были даны Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором. Аксиома непрерывности в нашей системе, изложенной в гл. 2 — это аксиома Кантора.

После Паша ряд работ по основаниям геометрии был выполнен итальянским ученым Дж. Пеано и его учениками, среди которых вообще было развито внимание к проблемам логики и оснований математики (в частности, Пеано дал аксиомы натурального ряда). Один из них — М. Пиери — опубликовал в 1899 г. систему аксиом евклидовой геометрии, в которой было только два основных понятия — точка и движение (перемещение). Однако из-за такого уменьшения числа основных понятий аксиоматика получилась громоздкой и трудно обозримой, прежде всего из-за необходимости определить через движение и прямую, и плоскость, и отношение порядка.

В том же 1899 г. появилась в первом издании работа Гильберта (1862—1943) «Основания геометрии», которая затем неоднократно переиздавалась, причем в изложенную в ней аксиоматику вносились, без изменения общего ее характера, отдельные уточнения и упрощения, предлагавшиеся также и другими авторами. (В первоначальном виде система аксиом Гильберта была даже неполной, на что обратил внимание Пуанкаре, и Гильберт добавил аксиому полноты. Кроме того, были, например, удалены, оказавшиеся лишними, три аксиомы порядка, которые удалось доказать как теоремы, и теперь остались независимые аксиомы порядка.)

Выше, в § 35, была изложена аксиоматика Гильберта для планиметрии, в § 43 — дополнительно часть ее, нужная для стереометрии (у самого Гильберта они не разделены). Несмотря на это, мы дадим здесь общую характеристику работы Гильберта в плане ее значения в истории оснований геометрии[1]).

Основная заслуга Гильберта, благодаря которой его труд стал классическим, заключается в том, что ему удалось построить аксиоматику геометрии, расчлененную настолько естественным образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной; (первые три группы аксиом управляют каждая своим основным отношением — принадлежности, порядка, конгруэнтности). Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развить геометрию, если класть в основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом. Такой логический анализ, выясняющий роль отдельных групп аксиом, проведен Гильбертом в ряде исследований, составляющих в действительности большую часть его книги. Кроме того работа Гильберта дала толчок целому ряду исследований в том же направлении.

Важно также, что работа Гильберта представила аксиоматику геометрии в форме, подчеркнуто отстраненной от наглядных представлений. Так, точки и прямые — это просто некоторые мыслимые «вещи», в первом издании их связь выражалась аксиомой: «Каждые две точки определяют прямую». Словом, как уже говорилось при характеристике формальной аксиоматики, у Гильберта под «точками», «прямыми» и «плоскостями» и под отношениями «принадлежит», «между», «конгруэнтно» понимаются какие-то «вещи» и отношения, о которых известно только то, что они удовлетворяют аксиомам. При таком взгляде необходимо встает вопрос о непротиворечивости аксиом. Для его решения Гильберт указывает аналитическую модель, в которой выполняются аксиомы (равносильную той, которая изложена у нас в § 30). Этим вопрос только сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики вещественных чисел, который сам требует решения. И так как арифметика целых, а вслед за тем вещественных чисел играет роль фундамента почти всей математики, то

[1]) Гильберт Д. Основания геометрии.— М.: Л.: Гостехиздат, 1948. В этом издании содержится статья П. К. Рашевского, из которой мы заимствуем данную характеристику работы Гильберта. Статья содержит, в частности, очень ясное изложение вопроса о геометрии как части физики и как части математики и др.

вопрос связывается с проблемой обоснования математики вообще.

Более того, так как исходя из аксиом, мы делаем умозаключения по законам логики, то желая установить непротиворечивость нашей системы, мы должны одновременно с математическим содержанием подвергнуть исследованию и саму логику. Тем более, что рассуждая о вещах и отношениях, о которых ничто не дано, кроме сказанного в аксиомах, мы не имеем критерия проверки вывода, иного кроме самой логики.

Для решения встающей таким образом проблемы Гильберт, непосредственно вслед за работой по основаниям геометрии, наметил метод полной формализации, который уже был кратко описан раньше. Предложения математики, равно как и законы логики, записываются при помощи особой символики в виде формул без участия словесных выражений. Требование осмысленности высказываний заменяется при этом правилами составления формул. Процесс логического вывода заменяется манипуляциями с такого рода формулами по точно и ясно указанным правилам. Теория задается правилами составления формул, исходными формулами и правилами механического получения из одних формул новых формул... Нет необходимости понимать, какое содержание записано в виде той или иной формулы: нужно иметь в виду формулу саму по себе, как конкретную и обозримую комбинацию знаков. Так, в принципе, развитие теории может быть передано машине. О машинах Гильберт не думал; машины, которым можно «поручать» такие доказательства теорем, появились гораздо позже. Но принцип полной формализации был явно выражен.

Так, от геометрической наглядности «Начал» Евклида основания геометрии были доведены до наглядности формул без всякого следа геометрического смысла. Однако фактически такая формализация оснований геометрии не была осуществлена и, как было позже доказано, она не могла привести к окончательному доказательству непротиворечивости геометрии.

Независимо от этого крайнего направления формализации аксиоматики за «Основаниями геометрии» Гильберта появлялись работы с другими вариантами аксиоматики, как, например, изложенная в § 36 аксиоматика, основанная на понятии движения (наложения), предложенная Ф. Шуром (1904); аксиоматика, предложенная тогда же В. Ф. Каганом (1869—1953), основанная, однако, на понятии о численном расстоянии; аксиоматика Г. Вейля, основанная на понятии векторного пространства (§ 46), и др.

Вопрос о выработке аксиоматики возможно более простой и легче ведущий к основным результатам элементарной геометрии, остается актуальным не только как классический вопрос математики, но не меньше в связи с задачами преподавания.

§ 62. Анализ предмета геометрии

Обратившись к «Основаниям геометрии» Гильберта, мы изменили временной последовательности: до их появления произошли важные изменения в понимании самого предмета геометрии.

Уже к середине XIX в. выявилось разделение свойств пространства и фигур в нем на три уровня: самый основной составляют свойства непрерывности, над ними — свойства взаимного расположения точек и прямых и над всем этим — метрические свойства, связанные с величинами, прежде всего — с понятием равенства отрезков; с изучения этих свойств начиналась и на нем сосредоточивалась геометрия Евклида.

Однако основные свойства пространства и фигур в нем составляют свойства непрерывности, вовсе с этим не связанные. Линия представляется как однократная непрерывная протяженность, поверхность — как двукратная, пространство — трехкратная непрерывная протяженность. Многомерное пространство определялось Риманом в его основополагающей работе 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» как многократная непрерывная протяженность[1]). «Мероопределение», т. е. измерение длин и расстояний, Риман вводил уже в эту протяженность.

Основу этих понятий выявил, можно сказать, еще Лобачевский в понятии о прикосновении, когда писал: «Прикосновение составляет отличительное свойство тел и дает им название геометрических, когда удерживаем это свойство, отвлекаясь от всех остальных». Исходя из

[1]) Многомерное пространство рассматривали и до Римана, но общее понятие (включая бесконечномерное пространство) ввел он.

понятия о прикосновении, можно дать определения понятиям топологии, понятиям непрерывности (фигура непрерывна или, как принято говорить, связна, если она не распадается на не прикасающиеся друг к другу части). Преобразование фигуры непрерывно, если оно не нарушает имеющихся в ней прикосновений. Граница — это то, что прикасается как к самой фигуре, так и к тому, что лежит вне нее. С точки зрения окрестностей (§ 32) точка «прикасается» к множеству *M*, если во всякой ее окрестности есть точки из *M*. Множество открыто, если оно не содержит точек своей границы[1]).

С середины XIX в. стала выделяться и складываться в особую дисциплину область геометрии, специально исследующая свойства фигур, основанные на прикосновении (свойства связности) — топология или как ее тогда еще называли — анализ положения». Но первые относящиеся сюда задачи и результаты восходили еще к Эйлеру и Гауссу.

Из линий выделяются прямые их специальными свойствами, и над общими свойствами непрерывности выявляются свойства пространства и фигур в нем, основанные на свойствах прямых линий и отрезков (плоскость можно определить как поверхность, которая содержит всякую прямую, имеющую в ней две общие точки). Изучение этих свойств составило аффинную геометрию.

Если же ввести еще понятие равенства отрезков, длины или расстояния, то появляется метрическая геометрия.

Можно дать еще такое определение. Метрическая геометрия евклидова пространства изучает свойства фигур, сохраняющиеся при перемещениях — преобразованиях, сохраняющих расстояние между точками. Аффинная геометрия изучает свойства фигур, сохраняющихся при преобразовании пространства, переводящих прямые в прямые (иначе говоря, сохраняющих прямолинейное расположение точек). Топология изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях. Из этих определений также ясно отношение глубины тех свойств, которые относятся к каждой из указанных областей геометрии.

Соответственно этому основания геометрии представляются так. Самую основу составляют свойства непрерыв-

---

[1]) Не следует, однако, думать, что понятия топологии исходят от Лобачевского; свое понятие прикосновения он не развивал.

ности, основанные на понятии прикосновения, и их должны выражать самые первые «топологические» аксиомы. Дальше должны следовать «аффинные» аксиомы, выражающие свойства, связанные с понятием прямой и расположением точек на ней. И, наконец, должны идти метрические аксиомы, выражающие свойства равенства фигур (которые могут определяться через равенство отрезков, или через наложимость, или как-либо иначе). Однако такое построение оснований геометрии встречает трудности и, по-видимому, неосуществлено.

Другой путь может состоять в том, что за топологическими аксиомами вводятся аксиомы, определяющие перемещения (наложения); причем естественно определять перемещения тел, а не всего пространства, как в аксиомах с флагами.

Однако такое естественное, казалось бы, построение оснований геометрии оказывается сложным. Еще Гильберт в 1902 г. построил основания планиметрии, начинающиеся с понятия непрерывности и налагающие очень простые аксиомы на перемещения. Но непрерывность определена у него через отображение на «числовую плоскость», т. е. через введение координат, так что полученная аксиоматика не является замкнутой: она в самой основе опирается на понятие числа, лежащее вне самой геометрии.

Замкнутая аксиоматика геометрии, берущей за основу топологические свойства и свойства перемещений, построена в недавнее время не только для плоскости, но и для n-мерного евклидова пространства.

Такой подход к основаниям геометрии, и само определение указанных уровней, на которые разделяются свойства фигур, приобрело, однако, достаточную точность только в связи с появлением взгляда на пространство и фигуры как на множества точек. Понятие непрерывной протяженности оставалось, собственно, интуитивным и немного отличалось от евклидовых определений линии и поверхности. И еще лет через 20 после Римана Клейн писал о пространстве как «месте точек». Фигура вообще определялась как геометрическое место точек. Точка принадлежит фигуре, лежит на прямой и т. п., но фигура не мыслится состоящей из точки.

Эта точка зрения изменилась после того, как в период 1875—1886 гг. Георг Кантор (1845—1918) создал теорию множеств. Пространство, фигуры стали определять как множества точек, т. е. некоторых элементов, называемых точками, как множества, в которых установлена соответствующая структура (как, например, в метрических и топологических пространствах, определение которых было дано в § 32). Множество в простейшем понимании толкуется как совокупность. Раньше фигура представлялась как место, в котором есть точки, но не состоит из точек, теперь стали говорить, что фигура состоит из точек. Эта «наивная» точка зрения сохраняется до сих пор во многих случаях. Однако логические трудности и парадоксы, обнаружившиеся в теории множеств уже к концу XIX в., заставили более глубоко мыслящих математиков отойти от наивного взгляда на множество просто как на совокупность. В частности, тот же Гильберт уже в 1904 г. выдвинул мысль, что множество следует рассматривать как «мыслимую вещь», находящуюся к другим вещам — элементам в известном отношении, обозначаемом словом «принадлежит».

В результате понятия множества точек и геометрического места точек стали по существу, равнозначными (как об этом было сказано в § 11 о фигурах). Как было отмечено при обсуждении системы Гильберта в § 35, он, очевидно, из понимания трудностей, заключающихся в понятии бесконечного множества, обошел его в своих «Основаниях геометрии», не считая последней аксиомы полноты. Отрезок как множество точек, лежащих между двумя данными, нигде в выводах Гильберта не нужен, достаточно о каждой рассматриваемой точке судить, принадлежит она данному отрезку или нет. И так как в применяемых конструкциях рассматривается каждый раз конечное число точек, то больше ничего и не нужно. То же относится к понятию луча: всегда нужно только о конечном числе точек судить с какой стороны от данной точки на прямой они лежат. Однако у Гильберта окружность, как и луч, определяется как совокупность точек (с соответствующим условием), что равносильно понятию множества в наивном понимании. Другого общего понятия фигуры у него нет; термин «фигура» он применяет лишь к совокупности конечного числа точек. Поэтому оснований элементарной геометрии как «науки о фигурах» у него нет.

Для того чтобы дать основания хотя бы элементарной геометрии в ее подлинном виде, мы и ввели, как одно из основных, понятие фигуры и формулировали соответствующие аксиомы без понятия множества (или бесконечной совокупности точек).

Вместе с тем, надо сказать, теория множеств привела в геометрии к выводам, представляющимся не то, чтобы удивительными, но и невозможными с наглядной точки зрения. Так, в начале нашего столетия было доказано, что сферу можно разделить на конечное число таких частей, что, перемещая их, из них можно составить две такие же сферы (то же поэтому можно сделать с полым шаром). По внешней формулировке этот результат принадлежит как будто элементарной геометрии, но по содержанию и доказательству вовсе выходит за ее пределы; никакое построение не может дать хотя бы приближения к таким частям сферы; доказательство их существования совершенно не эффективно (оно основано на аксиоме выбора).

В сравнительно недавнее время взгляд на отрезок как на множество точек привел к новым неожиданным следствиям. С самого возникновения теории множеств в ней встала так называемая «проблема континуума», которая может быть сформулирована на языке геометрии следующим образом. Существует ли на отрезке такое бесконечное множество точек, точки которого нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие ни с натуральными числами, ни со всеми точками самого отрезка?

Вопрос был решен американским математиком Коэном в 1970 г.: он доказал, что ответ может быть и положительным, и отрицательным — ни в том, ни в другом не будет противоречия. Иначе говоря, ответ зависит от выбора дополнительной аксиомы, подобно тому как возможен выбор между аксиомой параллельных и ее отрицанием.

Таким образом, выходит, что отрезок в элементарной геометрии оказывается не однозначно определенным объектом, если рассматривать его как множество точек. Вместе с тем в дальнейшем обойтись без того или иного понятия бесконечного множества как геометрического места точек даже в элементарной геометрии невозможно.

Тут мы видим проблему, которая ждет разъяснения, хотя можно думать, что абсолютной ясности в понятии бесконечности достигнуть вообще нельзя. И, повторяем, это касается не каких-то особых «высот» математики, но элементарной геометрии, если только вникнуть в ее основания достаточно глубоко.

Примерно 2400 лет назад пифагорейцы в Греции открыли несоизмеримые отрезки и тем дали начало понятию о математической непрерывности, о континууме, и до сих пор в нем открываются все новые глубины и трудности. Но даже в понятии натурального ряда открываются новые глубины и трудности.

Гильберт был убежден, что его теория доказательств с ее «конечной установкой» (сведения бесконечного к конечному), хотя бы в принципе позволит разрешить трудности и устранить возможность противоречий. Но надежды эти не оправдались. Математика оказалась гораздо сложней и интересней; не укладывается она ни в какую чисто формальную теорию, даже элементарная геометрия не поддается окончательному обоснованию. Тем оно интереснее: есть еще над чем подумать — не над оставшимися деталями, а над новыми принципами, как о пути в новые страны.

§ 63. Диалектика геометрии (в ее содержании)

Геометрия, возникая из практики, появилась, можно сказать, как первая глава физики: ее предмет составляли реальные пространственные отношения и формы тел. За ней логически следует вторая глава — механика: если геометрия трактует общие законы возможного взаимного расположения тел, то законы его изменения со временем входят в предмет механики.

Однако в Греции в период VII—V вв. до н. э. геометрия постепенно отделилась от опыта, ее предмет составили уже не реальные, а идеальные фигуры. Обращение к опыту исключалось из ее аргументов; ее утверждения превратились из констатаций опыта в теоремы — в предложения, требующие доказательства рассуждением, исходя из основных понятий. С идеальными фигурами нельзя ставить опыты, их в их идеальности можно только мыслить. Построения геометрии — только мыслимые, осуществлять их на самом деле нет надобности, чем они совершенно отличаются от экспериментов физики.

Вместе с тем само понятие об идеальных фигурах формировалось на почве тех логических рассуждений, которыми обосновывались выводы геометрии, поскольку в этих рассуждениях фигуры выступали как предметы мысли. Формирование идеального предмета геометрии и ее мыслительного метода шло единым процессом, в котором обе стороны как бы подталкивали друг друга в область абстрактного мышления.

Во всякой науке есть свои, порой далеко идущие абстракции[1]). Но математика, в частности геометрия, отличается от остальных наук тем, что в ней ее абстракции фигурируют в их самодовлеющем идеальном существовании без того, чтобы сверять их с опытом как это делается в других науках. Возникнув из практики, математические понятия превратились в человеческих головах в самостоятельные «вещи» как это очень ясно выражено, например, в аксиоматике Гильберта. Конечно, такое понимание выявилось постепенно, но во всяком случае в основе своей оно сложилось еще в Греции и знаменовало тем самым возникновение математики.

Отделение геометрии от действительности особенно четко проявилось, когда, исходя из теоремы Пифагора, были открыты несоизмеримые отрезки. Содержание теоремы Пифагора было известно до греков как закон реальной геометрии, подобно любому закону физики. Из этого закона, применяемого с идеальной точностью, следует, что диагонали и стороны квадрата несоизмеримы: нет отрезка, укладывающегося в них по целому числу раз.

Но это последнее утверждение нельзя проверить на опыте, потому что абсолютно точное измерение невозможно, и, более того, реальные предметы не имеют абсолютно точных размеров. Реальные измерения могли бы установить существование общей меры у стороны и диагонали квадрата с очень высокой точностью. Так, измерение единицами порядка миллиметра могло бы установить соизмеримость с точностью до микрона[2]).

---

[1]) Абстракция свойственна языку и, соответственно, мышлению. Уже имя собственное есть абстракция, так как «Иван Иванович» сегодня один, а завтра и тем более через 20 лет уже другой, хотя он все тот же Иван Иванович.

[2]) Выполняется следующая теорема. При любом данном числе $N > 0$ для любого данного квадрата найдется такое $l > 0$, что отрезок c длины l укладывается на стороне и диагонали квадрата по целому числу раз с погрешностью, меньшей l/N. Если N очень велико, то такую погрешность никак нельзя заметить. А всегда можно взять $l \geqslant a/N$, где a — сторона квадрата. Например, если отрезок c взять в 0,1 диагонали, то он уложится на стороне 7 раз с точностью до 0,01. Нарисуйте квадрат и убедитесь, что сторона и диагональ квадрата имеют такую общую меру с такой точностью. Так как можно обеспечить погрешность $\sim 1/N$ при подходящем $l \geqslant a/N$, то погрешность будет $\sim a/N^2$, так что если взять $N = 1000$, то погрешность будет порядка одной миллионной!

Таким образом, исходя из твердо установленного опытного факта, в геометрии был сделан вывод, не имеющий реального смысла; в физике ему не придали бы значения, но в математике он сохранился и имел величайшие последствия — во всех применениях и перипетиях учения о математическом континууме.

Что тут произошло? Во-первых, выводу из опыта, превращенному в теорему, была придана абсолютная точность. Во-вторых, на этом основании был произведен логический вывод и затем от этого вывода шло восхождение к новым отвлеченным понятиям.

Здесь с чрезвычайной ясностью выступила особенность и сущность не только геометрии, но и математики вообще — придавать абстракциям самодовлеющее бытие. Предмет геометрии составляет идеальные фигуры, хотя они явились изображением (отражением) реальных форм и выводы о них применяются к реальным телам.

Хотя геометрия строилась как наука об идеальных фигурах, тем не менее казалось, она совершенно точно отражает свойства реального пространства — свойства реальных форм и отношений реальных тел, хотя бы при предельном уточнении этих форм и отношений.

Абсолютное пространство, как понимал его Ньютон, представлялось несомненно обладавшим евклидовой геометрией. Никакая другая геометрия и не мыслилась. (В конце XVIII в. знаменитый философ Кант даже выдвинул мысль, что геометрия априорна — не зависит от опыта!)

Таким образом, в геометрии заключалось *противоречие*: будучи наукой об идеальных, только мыслимых формах, она считалась безусловно верной для реальных пространственных форм и отношений при предельном их уточнении.

Однако убеждение в таком соответствии идеальной и реальной геометрии было подвергнуто сомнению Лобачевским и Гауссом, и была понята возможность другой, неевклидовой геометрии. Потом, уже в начале нашего столетия, возникла общая теория относительности, согласно которой геометрия реальных пространственных отношений не является точно евклидовой (что находит подтверждение в космических масштабах).

Так евклидова геометрия, возникнув из опыта и отделившись от него в своей идеальности, пришла с ним хотя бы в некоторое несоответствие. Однако это ничуть не затрагивает ее как часть чистой математики, потому что в этом качестве она представляет собой систему логических выводов из аксиом, независимо от того или иного отношения их к действительности.

Противоречие, заключавшееся в евклидовой геометрии, как бы разорвало ее: произошло разделение геометрии на чисто математическую геометрию с ее единственным условием логической точности и на геометрию как физическую теорию, как учение о реальных пространственных отношениях, сверяемое с опытом, как присуще всякой физической теории.

Идеально точная евклидова геометрия, зародившись как опытная наука, превратилась, можно сказать, в собственную противоположность — в науку, которая сама по себе не заботится о соответствии с опытом, а в связи с опытом оказывается, как можно считать, не совсем точной. *Либо логическая точность без связи с реальностью, либо связь с реальностью без абсолютной точности* — так можно остро выразить это противоречие.

Такие противоречия, переход в противоположность, раздвоение единого — единой геометрии на математическую и физическую — охватывается общим понятием диалектики. В. И. Ленин писал: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его, ...есть суть... диалектики. Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки»[1]). Так в своей истории единая геометрия раздвоилась на части, разошедшиеся в математику и в физику.

Отделение математической геометрии от опыта, от физики особенно обострилось в теоретико-множественном взгляде на фигуры, как на «состоящие» из точек. Отношение этого представления к реальным фигурам более, чем отдаленное: оно, можно сказать, не имеет к ним отношения. Если следовать теории множеств, то можно прийти к выводам, совершенно немыслимым с точки зрения реальности, как упомянутое в предыдущем параграфе «составление» двух полных шаров из одного.

Для евклидовой геометрии в ее обычном содержании без крайностей, появляющихся на почве применения теории множеств, ее раздвоение между математикой и физи-

---

[1]) Ленин В. И. Полн. собр. соч.— Т. 29, с. 316.

кой имеет, конечно, принципиальное значение, но практически неосуществимо, если разумно ограничить ее область применения.

Отклонение от евклидовой геометрии, можно считать, обнаруживается в космических масштабах, но на Земле отклонения, которые выводятся из общей теории относительности, совершенно ничтожны и лежат за пределами, пока доступными опыту (чтобы их обнаружить, нужно увеличить точность измерения длин по меньшей мере в 100 раз в сравнении с достигнутой, дойдя до измерения длин порядка одной десятитысячной длины волны света).

Таким образом, если не следовать теории множеств, то евклидова геометрия может с очень высокой точностью рассматриваться как наука о фигурах в физическом смысле — как теория, касающаяся реальных пространственных отношений в пределах земного опыта. Ее строго дедуктивное построение на аксиомах возможно и без теории множеств.

Евклидова геометрия, тем более элементарная, может сохранять в указанных пределах свои прежние позиции, соединяя отвлеченный взгляд вместе с содержательным. Конечно, она отражает свойства реальных фигур, реальные пространственные отношения в весьма идеализированном виде, но точно так же, скажем, механика отражает реальные механические явления в идеализированном виде — в понятиях материальной точки или абсолютно твердого тела, каких нет в действительности. Поэтому, можно сказать, геометрия, при соответствующем понимании, в ее отношении к опыту «ничем не хуже» механики, хотя взятая как чисто математическая теория, как система логических выводов, она вовсе отделяется от опыта.

Так геометрия включает в себя эти противоположности: в ней мы постепенно переходим от наглядности к логическим выводам в отвлечении от наглядности и от этих выводов к применениям в других науках, в технике, в практике.

Аксиоматика, от которой мы отправлялись ввиду ее очевидной связи с реальностью, тем более дает основание для органического единства указанных противоположностей: эту аксиоматику можно понимать и как отвлеченное основание дедуктивной теории, и как выражение законов реальной геометрии.

§ 64. Диалектика геометрии (в ее построении)

Раздвоение геометрии очень ясно выступает в тех двух взглядах на аксиомы, о которых говорилось в § 27 гл. 5. С одной точки зрения и по своему происхождению аксиомы имеют наглядное содержание, отражающее действительность, практику; с другой точки зрения аксиомы — это не более как словесные определения, не выражающие сами по себе никакого смысла, и единственное обязательное требование к ним — это непротиворечивость.

Взятые в отношении к реальности, аксиомы и теоремы геометрии, как, например, теорема Пифагора, могут выражать законы природы и в таком качестве могут быть неточными или, в принципе, даже неверными. А теорема Пифагора в евклидовой геометрии незыблема как логический вывод из аксиом, но тогда нет вопроса о ее реальном смысле. Заостряя, можно сказать: *либо реальный смысл и тогда неточность, либо точность, но тогда отказ от смысла.*

Для утверждений, относящихся к реальной действительности, осмыслен вопрос об их истинности. Но математическая теория, взятая в ее качестве чисто математической теории, является системой логических выводов, и ее собственная математическая истинность состоит только в ее непротиворечивости. Понятие истины — «верно или неверно» выражает отношение утверждения к объекту. Но у отвлеченной аксиоматической теории нет объекта — она в своей рафинированной отвлеченности ни к чему не относится [1]).

Мы говорим о теории как системе логических выводов, но что такое логический вывод, по какой логике? Что значит правильное логическое рассуждение? Если рассуждение к чему-то относится, то его можно проверить по результату. Но логический вывод из отвлеченных аксиом ни к чему не относится. Стало быть, остается одно: уточнить, что значит «логический вывод», и, следовательно, что значит «непротиворечивость»: разве не можем мы прийти к противоречию, или, напротив, пропустить его из-за плохой логики?

---

[1]) Это в свое время остро выразил Рассел: «Математика есть доктрина, в которой неизвестно, о чем мы говорим, и верно ли то, что мы говорим».

Следовательно, нужно уточнить логику, устранить неточности, свойственные обычному языку. Сами правила уточненного языка и логики должны быть формальными, чтобы войти в аксиоматику данной теории, сделав совершенно ясным, как ее можно развивать.

Это находит свое осуществление в формальном представлении теории как «вычисления» с формулами, о чем уже было сказано в § 61. Смысл формул никак не учитывается и логические выводы сводятся к оперированию с формулами по строго предписанным правилам; формулы здесь просто комбинации некоторых предметов. В таком виде развитие теории можно передать машине.

Так теория, возникшая как отражение материальной действительности и оторвавшаяся от нее в своем развитии, возвращается к материи, но уже совсем другим образом — в виде машины, «доказывающей» теоремы. С развитием ЭВМ дело идет к тому, что математика будет машинизироваться.

Однако никакую содержательную теорию, включающую арифметику натуральных чисел, нельзя формализовать полностью, а стало быть, нельзя и до конца машинизировать. В ней при любой формализации останутся утверждения, которые формальными средствами нельзя будет ни доказать, ни опровергнуть.

Точно так же нельзя теми же формальными средствами решить, является теория непротиворечивой или нет, т. е. не получатся ли в ней, при чисто формальном ее развитии, две формулы, одна выражающая отрицание другой. Для машины это значило бы, что она «заклинится» на таких выводах.

Так как аксиомы геометрии включают понятие о последовательности натуральных чисел, то указанные выводы применимы также к ней. Формализовать ее полностью и формально доказать ее непротиворечивость невозможно. Это конечно, не должно нас смущать: как не может смущать то, что нет машины, работа которой была бы абсолютно гарантирована. Точность математики чрезвычайно высока, а возникающие трудности преодолеваются ее усовершенствованием (как были в свое время преодолены парадоксы теории множеств). Абсолютное не дано — оно открывается и формируется в развитии, не имеющем конца.

При всей возможной формализации любой математической теории теория эта имеет научный смысл и значение не просто в силу формальной строгости, а в меру того, насколько она, так или иначе, прямо или косвенно через другие теории, служит познанию действительности и овладению ею в практике. Теория может представлять и самостоятельный интерес, скажем, ввиду красоты построения. Но в таком качестве она имеет не научное, а эстетическое или иное значение, как имеет значение игра в шахматы. Но математика — не интеллектуальная игра в теоремы, а могущественное орудие познания.

Математику можно уподобить заводу, а ее теории — станкам. Станки служат для того, чтобы делать нужные людям вещи, сами же по себе они не нужны. Но именно станкостроение составляет основу развития индустрии. Как станку нужна точная и прочная структура, так и математической теории нужна логическая строгость — прочность ее структуры. В станке может работать непосредственно только резец, но без станка в целом он не будет хорошо работать. Так и в математике: непосредственно применяться на практике могут отдельные ее части и выводы, но, чтобы обеспечить точность этих применений, нужны целостные математические теории, вся логическая структура математики в целом.

Логическая строгость теории обеспечивает уверенность в приложении: если что-либо с приложением теории не получается, то это не из-за неточности теории, а либо из-за неточности данных, или из-за неточности соответствия условий задачи понятиям теории и т. п., а то просто из-за нашей ошибки. Тем более, что теория может применяться в разных областях, к разным явлениям, где только можно истолковать ее абстрактные понятия. Она применима ко всему, что подпадает под отвлеченное определение ее предмета, даваемое аксиомами. Так наука, восходя к абстракциям и тем удаляясь от действительности, вместе с тем приближается к ней, так как обретает возможность проникать в нее разностороннее и глубже.

Особенность элементарной геометрии среди других частей математики состоит в том, что она соединяет в себе строгую логику с наглядным представлением, логический анализ — с целостным синтетическим восприятием предмета. Можно сказать, что в существе своем геометрия и есть не что иное, как органическое соединение строгой логики с наглядным представлением: наглядное представление, пронизанное и организованное строгой логикой, и логика, оживленная наглядным представлением. Там, где нет одной из этих сторон, нет и подлинной геометрии. Хотя «лед и пламень не столь различны меж собой», но геометрия соединяет в себе эти противоположности. Даже в «Основаниях геометрии» при всей их рафинированной логике Гильберт не обошелся без рисунков.

Конечно, при современном развитии математики почти любой геометрический вопрос можно формулировать и решить методами алгебры и анализа. Евклидову и аффинную геометрию можно свести к алгебре векторного пространства (которое, хотя и называется пространством, представляет собою алгебраическую систему — коммутативную группу с операторами).

Однако геометрия — это не только содержание, но и способ рассмотрения, не только «тело», но и «геометрический дух», выражающийся в целостном синтетическом рассмотрении предмета и вносящий в другие области математики геометрические понятия и представления, идущие от непосредственной наглядности, начиная с геометрического языка анализа — как «точка разрыва», «область задания функции», «комплексная плоскость», «интегральные кривые дифференциальных уравнений» и т. д., и т. д. Функциональный анализ пронизан духом геометрии; его фундаментальное понятие пространства функций того или иного класса вышло из геометрии, появившись в работе Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии».

Мы углубились в логику оснований геометрии не для того, чтобы изгнать наглядность, а затем, чтобы укрепить ее и дать тем большую ясность, уверенность и простор духу наглядной геометрии.

ДОПОЛНЕНИЕ

О ГЕОМЕТРИИ РЕАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА И КОНВЕНЦИОНАЛИЗМЕ

Реальное или, как еще говорят, физическое пространство в отличие от абстрактно математического определяется в общем смысле как форма существования материи, или, как говорил еще Лейбниц, пространство есть порядок сосуществующих вещей. Оба определения означают, что то, что называют геометрией реального пространства, представляет собой фундаментальную структуру материальных отношений, физически реализованных связей между вещами, между элементами материи. «Физическая геометрия», как о ней говорилось выше в § 63, представляет теорию этой структуры, выражение общих ее законов.

Аксиомы планиметрии, с которых мы начинали, выражали реальные факты. В том же духе можно представить основания геометрии пространства, пользуясь протягиванием веревок, сравнением отрезков и откладыванием углов. Однако натянутые веревки и твердые стержни, с которыми оперируют в практических основаниях геометрии, не являются такими универсальными средствами, какими может устанавливаться объективная структура пространственных отношений в ее всеобщности.

Универсальную связь между телами осуществляет излучение: свет, ультрафиолетовые, радиоволны и др.; они и определяют в конечном счете структуру — геометрию пространства. *Лучи света протягивают в пространстве прямые линии, а длины волн отмечают расстояния* — так можно это себе наглядно представить.

Не искривлен ли немного край линейки, или не провисает ли натянутая нить, проверяют как раз по лучу зрения, т. е. по лучу света. Конечно, как известно, свет в атмосфере испытывает некоторое преломление, а в непрозрачные тела он вовсе не проникает. Но если учитывать не только видимый свет, а все виды излучения и вникнуть в вопрос глубже, то можно считать, что структура пространственных отношений устанавливается излучением повсеместно[1]). Такой практический способ определения (измерения) расстояний как радиолокация очень ясно демонстрирует роль излучения в установлении геометрических отношений. Отношения же, которые устанавливаются с помощью натянутых нитей и твердых стержней, согласуются с тем, что дает электромагнитное излучение, не благодаря счастливому совпадению, а вследствие электромагнитных и квантовых «сил», определяющих само строение вещества.

Существует, однако, такой взгляд, что в мире нет определенной геометрии, определенной структуры пространственных отношений, но что геометрия определяется нами по соглашению, по конвенции (отчего это воззрение получило название — «конвенционализм»). Откуда взялся такой взгляд?

Аксиомы геометрии допускают разные интерпретации, неевклидова геометрия может быть истолкована внутри круга, а в пространстве — внутри шара (все это показано в § 27, 39, 40). Такие возможности вызвали мысль, что и в реальном пространстве можно вводить разные геометрии, смотря по тому, какие линии считать прямыми и как измерять расстояния. Например, возьмем какие-нибудь оси координат, но будем отмерять на них координаты по-разному, а расстояния выражать через четвертые степени разностей этих координат. Очевидно, все явления там, где введены такие координаты, можно будет описывать в данной «геометрии» с помощью таких расстояний. Это будет неудобно, сложно, но нельзя сказать, что это невозможно или неверно, как нельзя сказать, что неверно применять какие угодно координаты. Поэтому, как сказал основатель конвенционализма, великий французский ученый Анри Пуанкаре,— говорить, что одна геометрия верна, а другая неверна, так же не имеет смысла, как говорить, что одни координаты верные, а другие неверные. Выходит, как заключил Пуанкаре, а за ним его последователи, что никакой определенной геометрии реального пространства нет, а это мы выбираем из всех возможных геометрий евклидову потому, что она проще. Выбор ее — дело условного соглашения.

Приведенное рассуждение при всей его кажущейся убедительности совершенно ошибочно, так как упускает

[1]) Фотон, можно сказать, всегда летит по прямой со скоростью света в вакууме; преломление света — это эффект своего рода рассеяния фотонов на молекулах вещества.

из виду фундаментальное различие между конвенциальной, вводимой по соглашению геометрией и той, которую можно назвать естественной. Конвенциальная геометрия всегда привязана к чему-то условно выбранному — как к системе координат в приведенном выше примере, к кругу или шару в истолковании геометрии Лобачевского, к какому-либо специальному способу определения расстояний и т. п. Она, таким образом, описывает пространственные отношения не сами по себе, а через их связь со специально выбранными средствами описания.

В противоположность этому естественная геометрия отражает пространственные отношения как они существуют в природе и, соответственно, устанавливаются в практике — лучами света, твердыми стержнями и т. д., как было еще у египетских земледельцев, без всяких соглашений. Достаточно сказать, что основные фигуры геометрии — прямолинейные отрезки в их физической реализации выделяются из всех линий многими объективными, независимыми от соглашений свойствами (например, край каждой из трех линеек прямой, если они попарно прикладываются один к другому вплотную).

Посмотрим на конвенциальную геометрию еще практически. Допустим, что мы задаем ее, проведя какие-нибудь линии в качестве «прямых» и еще какими-нибудь другими средствами. Что будет, если эти средства окажутся где-то недоступными или проведенные линии исчезнут как границы участков египтян при разливе Нила? Или как космонавты смогут пользоваться «геометрией», привязанной к чему-то вне их досягаемости? Ясно, что геометрия опирается на достаточно универсальные средства, чем можно воспользоваться в любых условиях. Существование же таких средств — это вопрос факта, а не соглашения. Поэтому конвенциальная геометрия, поставленная в один ряд с естественной,— не более как выдумка праздной кабинетной философии[1]).

---

[1]) Конвенционализм считает естественную геометрию тоже основанной на соглашении: выбрать в качестве определяющих ее средств лучи света и твердые стержни, как будто можно «выбрать» что-то другое. Эти взгляды, несмотря на их явную ошибочность, распространяются и даже проникают в методическую литературу: (см., например: Тесленко И. Ф. О преподавании геометрии в средней школе.— М.: Просвещение, 1985, с. 6; там написано: «Геометрия представляет ряд соглашений...» и т. д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 9—10 (для школ с углубленным изучением математики).— М.: Просвещение, 1984.
2. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1985.
3. Гильберт Д. Основания геометрии.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
4. Евклид. Начала. Тт. 1—3.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948—1950.
5. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.— М.: Наука, 1978.
6. Каган В. Ф. Основания геометрии. Ч. 1.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949, ч. 2.— М.: Гостехиздат, 1956.
7. Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1980.
8. Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия 9—10.—М.: Просвещение, 1982.
9. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия 6—8.— М.: Просвещение, 1979.
10. Погорелов А. В. Геометрия.— М.: Наука, 1984.
11. Погорелов А. В. Геометрия 6—10.— М.: Просвещение, 1986.
12. Об основаниях геометрии // Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей.— М.: Гостехиздат, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ